SUCESIONES Y SERIES

FL

$$\left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n} \right\}_{n \geq 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(p+k+1)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2k+p}$$



EDUARDO ESPINOZA RAMOS

SUCESIONES

Y

SERIES INFINITAS

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERU

IMPRESO EN EL PERU **3ra. Edición**

01 – 02 – 2008

RUC	N° 10070440607
Escritura Pública	N° 4484
Hecho el Deposito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú	N° 2007 – 12603
Ley de Derecho del Autor	N° 13714
Edición 3ra – Reimpresión 1ro	

PRÓLOGO

En la presente obra intitulada "Sucesiones y Series de Números Reales " en su 3era. Edición, se expone en forma concreta y precisa los fundamentos teóricos de las Sucesiones y Series. Se resuelven gran número de ejemplos y ejercicios como aplicaciones de los diversos teoremas y técnicas.

La selección de los ejemplos, ejercicios y problemas de cada capítulo, es consecuencia de la experiencia adquirida en la docencia universitaria y sugerencias brindadas por los colegas del área de matemáticas de las diversas universidades del país.

En el primer capítulo se estudia las Sucesiones, se establecen sus principales propiedades y se demuestran algunos criterios de convergencia no muy usuales.

En el segundo capítulo se desarrolla el concepto de Series. En la solución de algunos ejercicios se han utilizado las llamadas funciones especiales y se han calculado explícitamente algunas sumas de series principalmente utilizando las reglas TELESCÓPICAS .

Las series de potencia se desarrollan en el tercer capítulo, se calculan explícitamente el radio de convergencia y se estudia la diferenciación e integración de las mismas, así como las series de Taylor.

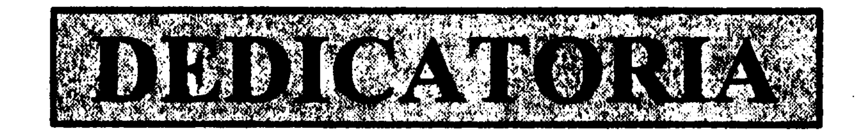
La lectura del presente trabajo, requiere de un adecuado conocimiento de las propiedades de los Números Reales, del Cálculo Diferencial e Integral y de las Funciones Especiales.

La presente obra es recomendable para todo estudiante de Ciencias Matemáticas, Física, Ingeniería, Economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos del análisis real.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al Doctor Pedro Contreras Ch. por las observaciones y sugerencias brindadas.

Agradezco por anticipado la acogida que ustedes brindan a esta pequeña obra.

Eduardo Espinoza Ramos.



DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de su prójimo

ÍNDICE

CAPÍTULO I

1. SUCESIONES.

1.1	Definición	1
1.2	Definición	3
1.3	Definición	5
1.4	Propiedades de Límites de Sucesiones	7
1.5	Teorema	10
1.5.1.	Teorema de la Media Aritmética	10
1.5.2.	Teorema de la Media Geométrica	12
1.5.3.	Teorema	15
1.5.4.	Teorema del Encaje para Sucesiones	16
1.5.5.	Teorema (Criterio de la Razón por la convergencia de Sucesiones)	17
1.6.	Sucesiones Divergentes.	20
1.7.	Sucesiones Monótonas y Acotadas.	21
1.8.	Teorema	24
1.9.	Teorema	25
1.10.	Sucesiones de Cauchy	26
1.11.	Teorema.- (Fórmula de STIRLING)	27
1.12.	Teorema.- (Criterio de Stolz-Cesaro)	28
1.13.	Ejercicios Desarrollados	29
1.14.	Ejercicios Propuestos	76

CAPÍTULO II

2. SERIES INFINITAS.

2.1	Definición	98
2.2	Definición	100

2.3 Propiedades 103
2.4 Teorema 106
2.5 Series Especiales 107
2.6 Series Infinitas de Términos Positivos 112
2.7. Teorema 112
2.7.1. Teorema (Criterio de Comparación Directa) 112
2.7.2. Teorema (Criterio de Comparación por Límite) 115
2.7.3. Teorema (Criterio de la Razón o Criterio de D'ALEMBERT) 117
2.7.4. Teorema (Criterio de la Integral) 119
2.7.5. Teorema (Criterio de la Raíz o Criterio de Cauchy) 122
2.8. Series Infinitas de Términos positivos y negativos 125
2.8.1. Teorema (Criterio de Leibniz) 125
2.8.2. Teorema 127
2.8.3. Teorema (Criterio de la Razón para Series Alternantes) 130
2.8.4. Teorema (Criterio de RAABE) 133
2.8.5. Teorema 136
2.9. Ejercicios Desarrollados 137
2.10. Ejercicios Propuestos 173

CAPÍTULO III

3. SERIES DE POTENCIA.

3.1. Definición 215
3.2. Propiedades 216
3.3. Definición 216
3.4. Diferenciación de Series de Potencias 218
3.5. Integración de Series de Potencia 218
3.6. Serie de Taylor 219
3.7. Ejercicios Desarrollados 221
3.8. Ejercicios Propuestos 242

CAPÍTULO I

1. SUCESIONES

1.1 DEFINICIÓN.-

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos, cuyo rango es un conjunto arbitrario.

Trataremos solamente de sucesiones de números reales, es decir:

Consideremos una función $S : Z^+ \to R$, tal que, $\forall n \in Z^+$, $S(n) \in R$, es un elemento de la sucesión.

En vez de escribir $S(n)$ escribiremos S_n y llamaremos n-ésimo término de la sucesión.

Notación.- A una sucesión infinita $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ representaremos por $\{S_n\}_{n \geq 1}$. Gráficamente se tiene:

Z^+ → S → R

1 → $S(1) = S_1$

2 → $S(2) = S_2$

3 → $S(3) = S_3$

⋮

n → $S(n) = S_n$

⋮

Ejemplos:

① La sucesión 1, 4, 9, 16, ... , n^2, ... se escribe así $\{n^2\}_{n\geq 1}$

② Los cinco primeros términos de la sucesión $\{\frac{(-1)^n}{n!}\}_{n\geq 1}$ son:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{120}$$

③ Hallar el término n-ésimo de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... ,

En efecto.

$$S_1 = 1 = 1 + 0$$

$$S_2 = 3 = 2 + 1$$

$$S_3 = 6 = 3 + 3$$

$$S_4 = 10 = 4 + 6$$

$$S_5 = 15 = 5 + 10$$

$$S_6 = 21 = 6 + 15$$

$$\vdots$$

$$S_n = n + \frac{n-1}{2}.n$$

De acuerdo a la regla de correspondencia de los primeros términos obtenemos que:

$$n + \frac{n-1}{2}.n$$

Luego la sucesión podemos escribir así: $\{\frac{n(n+1)}{2}\}_{n\geq 1}$

(4) Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ está definido por: $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$, hallar S_7.

En efecto: $S_1 = 1$

$S_2 = 1$

$S_3 = S_2 + S_1 = 1 + 1 = 2$

$S_4 = S_3 + S_2 = 2 + 1 = 3$ por definición de la sucesión

$S_5 = S_4 + S_3 = 3 + 2 = 5$

$S_6 = S_5 + S_4 = 5 + 3 = 8$

$S_7 = S_6 + S_5 = 8 + 5 = 13$

1.2 DEFINICIÓN.-

Una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, se dice que tiene límite L, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $N > 0$, tal que: $|S_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > N$ y denotaremos por $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$.

En forma simbólica, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N > 0 / n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

Ejemplos.- Usando la definición de límite probar que:

(1) Límite de $\{\frac{n+1}{n}\}_{n\geq 1}$, es 1, cuando $n \to \infty$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N > 0 / \forall n > N \ \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

En efecto: $|S_n - L| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$, pero necesitamos que $|S_n - L| = \frac{1}{n} < \varepsilon$,

de donde: $n > \frac{1}{\varepsilon}$, luego basta tomar $N > \frac{1}{\varepsilon}$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N > \frac{1}{\varepsilon} / n > N \text{, entonces } \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon .$$

② $\lim_{n\to\infty} (1 + (-1)^n \frac{1}{n}) = 1$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} (1 + (-1)^n \frac{1}{n}) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N = ?\ / n > N \ \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

En efecto: $|S_n - L| = \left|1 + (-1)^n \frac{1}{n} - 1\right| = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Pero debe cumplirse que $|S_n - L| < \varepsilon$, para ello hacemos $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de donde:

$n > N > \frac{1}{\varepsilon}$. Luego $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N > \frac{1}{\varepsilon} / |S_n - L| < \varepsilon$.

③ $\lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N = ?/ n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

En efecto: $|S_n - L| = \left|2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right| = \left|\dfrac{1 - 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}\right| \le \left|1 - 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|$.

Luego: $|S_n - L| \le |1 - 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}| = 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 < \varepsilon \Rightarrow 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \varepsilon + 1$, entonces,

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \log 2 < \log(\varepsilon + 1) \Rightarrow \sqrt{n} > \dfrac{\log 2}{\log(\varepsilon+1)}$, de donde: $n > (\dfrac{\log 2}{\log(\varepsilon+1)})$, basta tomar $n > N > (\dfrac{\log 2}{\log(\varepsilon+1)})^2$.

1.3 DEFINICIÓN.-

Se dice que una sucesión es convergente cuando tiene límite, en caso contrario la sucesión es divergente.

Ejemplos.- Determinar si es convergente ó divergente las sucesiones siguientes:

① $\{\dfrac{n+1}{2n+1}\}_{n\ge 1}$

Solución

Para determinar la convergencia ó divergencia de una sucesión bastará calcular el límite de la sucesión, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $\{\frac{n+1}{2n+1}\}_{n\geq 1}$ es convergente.

② $\{\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\}_{n\geq 1}$

Solución

Para determinar la convergencia ó divergencia de una sucesión bastará calcular el límite de la sucesión, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto: $\{\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\}_{n\geq 1}$, es convergente.

③ $\{\frac{n^2+1}{2n^2-n}\}_{n\geq 1}$

Solución

En forma similar a los ejemplos anteriores, calcularemos el límite de la sucesión, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}) = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto: $\{\frac{n^2+1}{2n^2}\}_{n\geq 1}$, es convergente.

④ $\{\frac{3n^3+1}{2n^3+1}\}_{n\geq 1}$

Solución

En forma similar a los ejemplos anteriores, calcularemos el límite de la sucesión, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+1}{2n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{1}{n^3}} = \dfrac{3+0}{2+0} = \dfrac{2}{3}$.

Por lo tanto: $\{\dfrac{3n^3+1}{2n^3+1}\}_{n\geq 1}$, es convergente.

1.4 PROPIEDADES DE LÍMITES DE SUCESIONES.-

Consideremos dos sucesiones convergentes $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y $\{S'_n\}_{n\geq 1}$ y k, una constante, entonces:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} k\ S_n = k \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm S'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n . S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n . \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{S'_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}{\lim\limits_{n\to\infty} S'_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n \neq 0$

La demostración de estas propiedades es análoga, a la de los límites de funciones reales, por lo tanto se deja para el lector.

Observación.- Para hallar el límite de una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, se calcula el límite del término n-ésimo de la sucesión S_n cuando $n \to \infty$, es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = L}$$

Ejemplos.- Calcular los límites siguientes

① $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}[(n+n^2)(1+\frac{1}{n+n^2})]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+n^2)^{\frac{1}{n}} . \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+n^2})^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{Ln(n+n^2)^{\frac{1}{n}}} . \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n+n^2})^{n+n^2}]^{\frac{1}{n(n+n^2)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n+n^2)}{n}} . e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+n^2)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1+2n}{n+n^2}} . e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+n^2)}}$$

$$= e^0 . e^0 = (1)(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}} = 1$$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^3+2n-1}-\sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n}-\sqrt{n^3+n^2-3n}}$

Solución

Racionalizando el numerador y denominador.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^3+2n-1}-\sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n}-\sqrt{n^3+n^2-3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n(\sqrt{n^3+n^2+3n}+\sqrt{n^3+n^2-3n})}{6n(\sqrt{3n^3+2n-1}+\sqrt{3n^3-2n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}+\sqrt{3-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1+1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1})\,\text{sen}^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{n})$

Solución

Primero racionalizamos a la expresión:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1})\,\text{sen}^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\,\text{sen}^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{n})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{2}{n})^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\text{sen}(\frac{2}{n})}{(\frac{2}{n})}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{sen}(\frac{2}{n})}{(\frac{2}{n})}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(2n)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^2}$$

(4) $\lim_{n\to\infty}[3-2(\frac{na+1}{na})]^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}[3-2(\frac{na+1}{na})]^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})}=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{-2}{na})^{-\frac{na}{2}}]^{(-\frac{2}{na}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na}))}$$

$$=e^{-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})}=e^{\frac{4}{\pi}}\text{ ,donde:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})=\lim_{x\to 0}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1+x)=-\frac{2}{\pi}$$

1.5 TEOREMA.-

1.5.1 TEOREMA DE LA MEDIA ARITMÉTICA.-

Consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ convergente, si $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$$

Demostración

Como $\lim_{n\to\infty}a_n=a \Rightarrow a_n=a+\delta_n$, donde: $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, por lo tanto, a la suma expresamos así:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=\frac{a+\delta_1+a+\delta_2+...+a+\delta_p+a+\delta_{p+1}+...+a+\delta_n}{n}$$

$$=\frac{na}{n}+\frac{\delta_1+\delta_2+...+\delta_p}{n}+\frac{\delta_{p+1}+\delta_{p+2}+...+\delta_n}{n}$$

Como la suma $\delta_1+\delta_2+...+\delta_p=k$ (constante) por ser una suma finita, como: $|\delta_i|_{i\leq p}<\varepsilon$, entonces:

$|\delta_{p+1}+\delta_{p+2}+...+\delta_n|<|\delta_{p+1}|+|\delta_{p+2}|+...+|\delta_n|<M\varepsilon$, por lo tanto su límite de, $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, es: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$

Ejemplos: Calcular los siguientes límites:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2+3}}(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+...+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}})$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2+3}}(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+...+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{16n^2+3}}.\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+...+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}})$$

$=(\frac{1}{4})(1)=\frac{1}{4}$, de donde se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{16n^2+3}}=\frac{1}{4}$

además: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}=1$ y por el teorema de la media aritmética se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+...+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}})=1.$$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-8n^3}}(9+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...+\frac{n+3}{n+4})$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-8n^3}}(9+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...+\frac{n+3}{n+4})=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[3]{1-8n^3}}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{1-8n^3}}\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...+\frac{n+3}{n+4}\right)\frac{1}{n} = 0+(-\frac{1}{2})(1)=-\frac{1}{2}$$

donde: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[3]{1-8n^3}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{1-8n^3}}=-\frac{1}{2}$ y como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4}=1$

por el teorema de la media aritmética se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...+\frac{n+3}{n+4}\right)=1$

1.5.2. TEOREMA DE LA MEDIA GEOMETRICA.-

Consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ convergente, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, entonces:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}=a}$$

Demostración

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \ln(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)=\ln(a)$, de donde: $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(a_n))=\ln(a)$,

sea $u_n=\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \Rightarrow \ln u_n=\ln\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n)$

Tomando limite cuando $n\to\infty$ y aplicando el teorema de la media aritmética

$$\lim_{n\to\infty}\ln(u_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n)$$

$$\ln(\lim_{n\to\infty}u_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n}=\ln(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n})=\ln a$$

Levantando el logaritmo en ambos miembros: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}=a$

Ejemplo.- Calcular los siguientes límites:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{5}.\frac{5}{8}.\frac{7}{11}...\frac{2n+1}{3n+2}}$

Solución

Se observa que: $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_2 = \frac{5}{8}$, $a_3 = \frac{7}{11}$, ..., $a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$, de donde:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$, luego el teorema de la media geométrica se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{5}.\frac{5}{8}.\frac{7}{11}...\frac{2n+1}{3n+2}} = \frac{2}{3}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\ln(3)}{\ln(5)}.\frac{\ln 6}{\ln 10}...\frac{\ln(3n)}{\ln(5n)}}$

Solución

Se observa que: $a_1 = \frac{\ln 3}{\ln 5}$, $a_2 = \frac{\ln 6}{\ln 10}$, ..., $a_n = \frac{\ln(3n)}{\ln(5n)}$, de donde:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(3n)}{\ln(5n)} = 1$, luego por el teorema de la media geométrica se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln 3}{\ln 5}.\frac{\ln 6}{\ln 10}...\frac{\ln(3n)}{\ln(5n)}} = 1$

OBSERVACIÓN.- Existen limites que se calculan mediante la integral definida (veamos el caso particular)

Para la integral definida sobre el intervalo [0,1], de donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \quad c_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{i}{n} = \frac{i}{n} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{i}{n}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}).\frac{1}{n}$$

Ejemplos.- Calcular los siguientes límites:

① $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+...+\sqrt[n]{e^n}}{n}$

Solución

Al límite dado lo expresaremos en una integral definida

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+...+\sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n}{n}})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big/_0^1 = e-1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+...+\sqrt[n]{e^n}}{n} = e-1$$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{n}{i^2+n^2}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{i}{n})^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x \Big/_0^1 = arctg\, 1 - arctg\, 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^6+2^6+...+n^6}{n^7}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+...+n^6}{n^7}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}((\frac{1}{n})^6+(\frac{2}{n})^6+...+(\frac{n}{n})^6)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^6=\int_0^1 x^6dx=\frac{x^7}{7}\Big/_0^1=\frac{1}{7}-0=\frac{1}{7}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+...+n^6}{n^7}=\frac{1}{7}$$

1.5.3. TEOREMA.- Demostrar que: $\lim_{n\to\infty} r^n=0$, si $0<r<1$ y si $r>1$, $\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$

Demostración

De acuerdo a la definición 1.2 se tiene: $\forall\ \varepsilon>0$, buscaremos un numero $N>0$, de tal manera que: $|r^n-0|<\varepsilon$, $\forall\ n>N$

Luego: $|r^n-0|=r^n<\varepsilon \iff n\ln r<\ln\varepsilon \iff n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}=N$, puesto que $0<r<1$, por lo tanto: dado $\varepsilon>0$, $\exists\ N=\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}$, tal que: $|r^n-0|<\varepsilon$, $\forall\ n>N=\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}$, es decir: $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

Ejemplos.-

① $\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ puesto que $r=\frac{2}{3}<1$

② $\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{3})^n=+\infty$ puesto que $r=\frac{4}{3}>1$

1.5.4. TEOREMA DEL ENCAJE PARA SUCESIONES.-

Si $\forall\ n \in Z^+$, $\exists$ N > 0, tal que: $a_n \le c_n \le b_n$, $\forall$ n > N y si

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

Demostración

Por hipótesis tenemos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0, \exists\ N_1 > 0 / n > N_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$,

es decir: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ **... (1)**

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_2 > 0\ /\ n > N_2 \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$, es decir:

$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \quad \textbf{... (2)}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces tenemos:

$L - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < L + \varepsilon$, de (1), (2) e hipótesis

Luego tenemos $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$

Por lo tanto, dado ε > 0, $\exists\ N = \max\{N_1, N_2\}$, tal que:

n > N $\Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$, de donde: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, por definición 1.2.

Ejemplo.- Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$

Solución

$\forall\ n \in Z^+$, $-1 \le \cos n \le 1$, como $n \in Z^+ \Rightarrow \dfrac{1}{n} > 0$, entonces:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}, \text{ y como } \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Luego por el teorema 1.8, se tiene: $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$

Ejemplo.- Demostrar que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$, $0 < a < b$

Solución

Como $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n \Rightarrow b^n < a^n + b^n < 2b^n \Rightarrow b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2b}$

como $\lim_{n\to\infty} b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2b} = b$, entonces por el teorema 1.8 se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$$

1.5.5. TEOREMA.- (CRITERIO DE LA RAZON PARA LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES).-

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{S_{n-1}}{S_n}\right| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ y por lo tanto. La sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

Demostración

Por hipótesis se tiene: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{S_{n-1}}{S_n}\right| < 1$, sea r un número real, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{S_{n-1}}{S_n}\right| < r < 1 \Rightarrow \exists\, N > 0 \,/\, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{S_{n-1}}{S_n}\right| < r, \text{ siempre que } n > N$$

Sea $p \in Z^+ \ / \ p > N \Rightarrow \left|\frac{S_{p-1}}{S_p}\right| < r \Rightarrow |S_{p+1}| < r|S_p|$, de donde:

$|S_{p+2}| < r|S_{p+1}| < r^2|S_p|$, en general se tiene:

$|S_{p+k}| < r^k|S_p|$, de donde: $-r^k|S_p| < S_{p+k} < r^k|S_p|$,

como $0 < r < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} r^k = 0$ (teorema 1.7)

Luego $\lim\limits_{k\to\infty} -r^k|S_p| = \lim\limits_{k\to\infty} r^k|S_p| = 0$ y por el (teorema 1.8) se tiene:

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{p+k} = 0$, por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

Ejemplos.- Demostrar que:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$

Solución

Sea $S_n = \frac{5^n}{n!} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$, entonces por el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!5^{n+1}}{(n+1)!5^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0 < 1$$

Luego por el teorema (1.9) se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

Solución

Sea $S_n = \frac{n}{3^n} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1).3^n}{n.3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

Luego por el teorema (1.9) se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n} = 0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Solución

Aplicando el criterio de la razón para sucesiones convergentes.

Sea $S_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}.n!} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{-1}{n+1})^{-(n+1)}]^{\frac{n}{-(n+1)}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Por lo tanto por el teorema 1.9 se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

1.6 SUCESIONES DIVERGENTES.-

Se ha dicho que una sucesión es divergente cuando no tiene límite, esto puede ser, divergente a $+\infty$; a $-\infty$ u oscilante.

a) DEFINICIÓN.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión, diremos que: $S_n \to +\infty$, cuando $n \to \infty$, si para todo $M > 0$, existe $N > 0$, tal que: $S_n > M$, $\forall$ $n > N$

Ejemplo.- Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n-1} = +\infty$

Solución

$\forall$ M > 0, $\exists$ N = ? (que depende de M), tal que:

$$3^{2n-1} > M \Rightarrow (2n-1)\ln 3 > \ln M \text{ , es decir } n > \frac{1}{2}(\frac{\ln M}{\ln 3}+1) = N$$

b) DEFINICIÓN.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión, diremos que: $S_n \to -\infty$, cuando $n \to \infty$, si para todo $M > 0$, existe $N > 0$, tal que: $S_n < -M$, $\forall$ $n > N$

Ejemplo.- Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} 1-2n = -\infty$

Solucem

$$\forall M > 0, \exists N = ? / 1-2n < -M \Rightarrow n > \frac{1+M}{2} = N$$

Luego $\forall$ M > 0, $\exists$ $N = \dfrac{1+M}{2}$ / 1 – 2n < -M, $\forall$ n > N

c) DEFINICIÓN.- Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ diverge, pero no a $-\infty$, ni a $+\infty$, y además toma valores positivos y negativos en forma alternada, diremos que la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es oscilante.

Ejemplo.- La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$, es oscilante, pues la sucesión es -1, 1, -1,..., si n es par $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ y cuando n es impar $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = -1$, Luego $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$, por lo tanto, no es convergente; pero tampoco diverge a $+\infty$, ni a $-\infty$, por lo tanto, es oscilante por definición c).

1.7. SUCESIONES MONÓTONAS Y ACOTADAS.-

a) DEFINICIÓN.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión, entonces:

i) Si $S_n \leq S_{n+1}$, $\forall$ n > N $\Rightarrow$ la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es creciente.

ii) Si $S_{n+1} \leq S_n$, $\forall$ n > N $\Rightarrow$ la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente.

A una sucesión que sea creciente o decreciente le llamaremos monótona.

OBSERVACIÓN.-

Si $S_n \leq S_{n+1}$ $\Rightarrow$ diremos que la sucesión es estrictamente creciente.

Si $S_{n+1} \leq S_n$ $\Rightarrow$ diremos que la sucesión es estrictamente decreciente.

Ejemplos.-

① Determinar si la sucesión $\{\frac{n}{2n+1}\}_{n\geq 1}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución

Escribiremos los elementos de la sucesión $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\ldots,\frac{n}{2n+1},\frac{n+1}{2n+3},\ldots,$

Se observa que los cuatro primeros elementos de la sucesión van creciendo cuando n crece.

En general tenemos: $$\frac{n}{2n+1}\le\frac{n+1}{2n+3} \qquad \ldots(1)$$

La desigualdad (1) se verifica si encontramos otra desigualdad equivalente en al cual podemos afirmar que es valida.

Así por ejemplo en la desigualdad (1) podemos escribir:

$$2n^2+3n\le 2n^2+3n+1 \qquad \ldots(2)$$

La desigualdad (2) es valida porque el miembro de la derecha es igual al de la izquierda mas uno, por lo tanto la desigualdad (1) es valida.

Es decir: $S_n\le S_{n+1}$, luego la sucesión es creciente.

(2) Determinar si la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\ge1}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución

Escribiremos los elementos de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\ge1}$, $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots$

Se observa que los cuatro primeros elementos de la sucesión van decreciendo cuando n crece.

En general tenemos: $$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n} \qquad \ldots(1)$$

La desigualdad (1) escribiremos en otra desigualdad equivalente para ver su validez.

$$n \leq n + 1 \qquad \dots \textbf{(2)}$$

La desigualdad (2) es validad porque el miembro de la derecha es igualdad al miembro de la izquierda mas uno, por lo tanto la desigualdad (1) es valida.

Luego $S_{n+1} \leq S_n$, entonces la sucesión es decreciente.

b) DEFINICIÓN.- Al numero A le llamaremos cota inferior de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ si $A \leq S_n$, $\forall\ n \in Z^+$, y al numero B le llamaremos cota superior, si $S_n \leq B$, $\forall\ n \in Z^+$.

Ejemplos.-

① En la sucesión $\{\frac{n}{2n+1}\}_{n\geq 1}$, una cota inferior es cero, cuyos elementos son: $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\dots,\frac{n}{2n+1},\dots$, otra cota inferior es $\frac{1}{3}$, en general una cota inferior es menor o igual que $\frac{1}{3}$.

② En la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$, el 1 es una cota superior, en general cualquier número mayor o igual que 1 es cota superior.

c) DEFINICIÓN.- Si A es cota inferior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y A $\geq$ C para toda cota inferior C de $\{S_n\}_{n\geq 1}$; entonces A ser llama la máxima cota inferior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$.

Si B es cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y si B $\leq$ D para toda cota superior D de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, entonces: B se llama la mínima cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$.

d) **DEFINICIÓN.-** La sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ diremos que esta acotada, si y solo si, tiene cota superior e inferior, es decir: $|S_k| \leq k$, $\forall\ n \in Z^+$.

Ejemplo.- La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es acotada.

1.8 TEOREMA.-

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, entonces:

i) Si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

ii) Si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

Demostración

i) $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es acotada superiormente, por hipótesis α = mínima cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, dado un número $\varepsilon > 0$, se tiene que $\alpha - \varepsilon$, no es cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, pues $\alpha - \varepsilon < \alpha$ y α es la mínima cota superior de la sucesión como $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior, $\exists$ un número entero positivo N > 0, tal que: $\alpha - \varepsilon < S_n$, $\forall\ n > N$ **... (1)**

Tenemos $S_n < \alpha$, $\forall\ n \in Z^+$ **... (2),** α es la mínima cota superior.

Si $S_n \leq S_{n+1}$, $\forall\ n > N$ **... (3),** ($\{S_n\}_{n\geq 1}$ es creciente por hipótesis).

Luego $S_n \leq S_n$ pero $n > N$ .... **(4)**,

De **(1)**, **(2)**, **(3)** y **(4)**, se tiene que: $\alpha - \varepsilon < S_n \leq S_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$ siempre que $n > N \Rightarrow \{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente y su límite es la mínima cota superior.

ii) La demostración es similar que **(i)**.

OBSERVACIÓN.- El teorema establece que toda sucesión monótona y acotada es convergente.

1.9 TEOREMA.-

Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración

Para demostrar que: $|S_n| \leq k$, $\forall$ n

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión convergente y sea L su límite, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ N > 0 / n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon,$$

tenemos: $|S_n - L| < \varepsilon$, $\forall$ n > N

$S_n = S_n - L + L \Rightarrow |S_n| \leq |S_n - L| + |L| < \varepsilon + |L|$ de donde: $|S_n| < \varepsilon + |L|$, $\forall$ n>N

$S_1, S_2, \ldots, S_N, S_{N+1}\ldots$ acotada por $\varepsilon + |L|$.

Sea $k = \max\{|S_1|,\ |S_2|,\ |S_3|, \ldots, |S_n|,\ \varepsilon + |L|\}$, luego se tiene: $|S_n| \leq k$, $\forall$ n.

1.10. SUCESIÓN DE CAUCHY.-

a) DEFINICIÓN.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, se dice que es una sucesión de cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$, $\exists$ N > 0 / m > N, n > N entonces $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Ejemplos.-

① La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

En efecto: $\forall \in > 0, \exists N = ? \ / \ \forall m > N, n > N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$

i) Si m = n $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = 0 < \varepsilon$, $\forall$ n.

ii) Si m > n $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ pero debe cumplir que:

$|S_m - S_n| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ de donde: $n > \frac{1}{\varepsilon} = N$, (m > n > N). Luego bastará tomar $N = \frac{1}{2}$.

iii) Si n > m $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ como $|S_m - S_n| < \varepsilon$, entonces: $\frac{1}{m} < \varepsilon \Rightarrow m > \frac{1}{\varepsilon} = N$. Luego bastará tomar $N = \frac{1}{\varepsilon}$ (n >m>N).

② La sucesión $\{\frac{n+1}{n}\}_{n\geq 1}$, es de cauchy.

En efecto: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists N = ? / n, m > N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$

$|S_m - S_n| = \left|\frac{m+1}{m} - \frac{n+1}{n}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, se reduce al ejemplo anterior, luego bastará tomar $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

1.11. TEOREMA.- (FÓRMULA DE STIRLING).-

Demostrar que para n grande: $n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}$ aproximadamente.

Demostración

Por definición de la función GAMA, se tiene:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{n \ln x - x} dx \qquad \textbf{... (1)}$$

La función n L_n x - x, tiene un máximo relativo para x = n (queda como ejercicio probar).

Haciendo la sustitución x = n + y en la ecuación **(1)**:

$$\Gamma(n+1) = e^{-n} \int_{-n}^{\infty} e^{n \ln(n+y) - y} dy = e^{-n} \int_{-n}^{\infty} e^{n \ln n + n \ln(1+\frac{y}{n}) - y} dy$$

$$= e^{-n} n^n \int_{-n}^{\infty} e^{n \ln(1+\frac{y}{n}) - y} dy \qquad \textbf{... (2)}$$

También se conoce que: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ **... (3)**

Haciendo $x = \frac{y}{n}$, además $y = \sqrt{n}\, v$, se tiene:

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n} \int_{-n}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2n} + \frac{y^3}{3n^2} - \ldots\ldots} dy = n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{v^2}{3\sqrt{n}} \ldots} dv \qquad \textbf{... (4)}$$

Para n grande, una buena aproximación es:

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\sqrt{2\pi n}\;n^n e^{-n} \qquad \text{...(5)}$$

Además $\Gamma(n+1)=n!$ **... (6)**

Por lo tanto de **(6)** en **(5)** se tiene: $n!=\sqrt{2\pi n}\;n^n e^{-n}$.

Ejemplo.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,e^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}{n}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2\pi n}$$

$$=\frac{1}{e}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[2n]{2\pi n}}=\frac{1}{e}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2\pi n}{2n}}=\frac{1}{e}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}e^{0}=\frac{1}{e}$$

1.12. TEOREMA.- (CRITERIO DE STOLZ-CESARO).-

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$, dos sucesiones tal que:

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ y la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$, es monótona ó.

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, y la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$, es monótona, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lambda$$

Ejemplo.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$

Solución

$$\text{Sea } \begin{cases} a_n = \ln(n!) \\ b_n = \ln(n^n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \ln(n+1)! \\ b_{n+1} = \ln(n+1)^{n+1} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{\ln(n+1)^{n+1} - \ln n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{(n+1)!}{n!})}{(n+1)\ln(n+1) - n\ln .n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n.\ln(\frac{n+1}{n}) + \ln(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n)^{\frac{1}{n}}}{\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\ln e}{\ln 1 + \ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = 1$$

1.13. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión

$$S_n = \frac{(2n+5)^{2n+5} n^{n-3}}{(4n+1)^{n+2}(n+3)^{2n}}$$

Solución

$$S_n = \frac{(2n+5)^{2n+5} n^{n-3}}{(4n+1)^{n+2}(n+3)^{2n}} = \frac{(2n)^{2n+5}(1+\frac{5}{2n})^{2n+5} n^{n-3}}{(4n)^{n+2}(1+\frac{1}{4n})^{n+2} n^{2n}(1+\frac{3}{n})^{2n}}$$

$$=\frac{2^{2n+5}n^{2n+5}n^{n-3}n^{-2n}(1+\frac{5}{2n})^{2n+5}}{4^{n+2}n^{n+2}(1+\frac{1}{4n})^{n+2}(1+\frac{3}{n})^{2n}}=\frac{2^{2n+5}n^{2+n}(1+\frac{5}{2n})^{2n+5}}{2^{2n+4}n^{n+2}(1+\frac{1}{4n})^{n+2}(1+\frac{3}{n})^{2n}}$$

$$=\frac{2(1+\frac{5}{2n})^{2n+5}}{(1+\frac{1}{4n})^{n+2}(1+\frac{3}{n})^{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2[(1+\frac{5}{2n})^{\frac{2n}{5}}]^{\frac{5(2n+5)}{2n}}}{[1+\frac{1}{4n}]^{4n(\frac{n+2}{4n})}[1+\frac{3}{n}]^{\frac{n}{3}(\frac{6n}{n})}}=\frac{2e^5}{e^{\frac{1}{4}}e^6}=2e^{-\frac{5}{4}}.$$

(2) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n^6+1}\,\text{sen}(\frac{n\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3n\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5n\pi}{n+1})$

Solución

$$\text{sen}(\frac{n\pi}{n+1})=\text{sen}(\pi-\frac{\pi}{n+1})=\text{sen}(\frac{\pi}{n+1})$$

$$\text{sen}\Big(\frac{3n\pi}{n+1}\Big)=\text{sen}\Big(3\pi-\frac{3\pi}{n+1}\Big)=\text{sen}\Big(\frac{3\pi}{n+1}\Big)$$

$\text{sen}\Big(\frac{5n\pi}{n+1}\Big)=\text{sen}\Big(5\pi-\frac{5\pi}{n+1}\Big)=\text{sen}\Big(\frac{5\pi}{n+1}\Big)$, de donde:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^6+1}\,\text{sen}\Big(\frac{n\pi}{n+1}\Big).\text{sen}\Big(\frac{3n\pi}{n+1}\Big).\text{sen}\Big(\frac{5\pi n}{n+1}\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^6+1}\,\text{sen}\Big(\frac{\pi}{n+1}\Big).\text{sen}\Big(\frac{3\pi}{n+1}\Big).\text{sen}\Big(\frac{5\pi}{n+1}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+1}}{(n+1)^3}(n+1)^3 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{n+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+1}}{(n+1)^3}.\lim_{n\to\infty}(n+1)^3 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{n+1}) \quad \textbf{... (1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+1}}{(n+1)^3} = \sqrt{2} \quad \textbf{... (2)}$$

Sea $z = \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 = \frac{1}{z}$; cuando $n \to \infty,\ z \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^3 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{n+1}) = \lim_{z\to\infty} z^{-3} \operatorname{sen}\pi z.\operatorname{sen}3\pi z.\operatorname{sen}5\pi z$$

$$= \lim_{Z\to\infty} \pi\frac{\operatorname{sen}\pi Z}{\pi Z}.3\pi\frac{\operatorname{sen}3\pi Z}{3\pi Z}.5\pi\frac{\operatorname{sen}5\pi Z}{5\pi} = 15\pi^3 \quad \textbf{... (3)}$$

Ahora reemplazamos **(2)**, **(3)**, en **(1)**

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^6+1}\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{3n\pi}{n+1}).\operatorname{sen}(\frac{5n\pi}{n+1}) = 15\sqrt{2}\pi^3$$

(3) Calcular $\lim_{n\to\infty} n^6[\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n^n+3}}]^{3n}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} n^6[\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^n+3}}]^{3n} = \lim_{n\to\infty} n^6[\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}}(1 - \frac{\sqrt[n]{n^2+3}}{\sqrt[n]{n^n+3}})]^{3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{(n^2+3)^3}(1 - \sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^n+3}})^{3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+3}\right)^3\left[\left(1-\sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^n+3}}\right)^{-\sqrt[n]{\frac{n^n+3}{n^2+3}}}\right]^{-3n\sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^n+3}}}$$

$$=(1)^3 e^{-3\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^n+3}}} = e^{-3}\text{, donde: } \lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^n+3}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n+2}+3n^n}{n^n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n(n^2+3)}{n^n(1+3n^{-n})}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+3}{1+3n^{-n}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln\left(\frac{n^2+3}{1+3n^{-n}}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Ln\,(n^2+3)-Ln\,(1+3n^{-n})}{n}} = e^0 = 1$$

Aplicando la regla de L'Hospital

(4) Evaluar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$

Solución

Racionalizando numerador y denominador

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{1\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n^2}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{0+0+0}{\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{1+0}+1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{0}{1+1+1}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = 0$$

(5) Calcular el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)$, $a>0$

Solución

Hacemos $Z = \sqrt[n]{a}-1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = Z+1 \Rightarrow \frac{1}{n}\ln a = \ln(1+z)$ de donde:

$\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+z)}{\ln a} \Rightarrow n = \frac{\ln a}{\ln(1+z)}$, cuando $n\to\infty \Leftrightarrow z\to 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+z)}z = \ln a.\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \ln a.\frac{1}{\ln e} = \ln a.$$

$$\therefore \quad \mathop{Lim}_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \ln a$$

(6) Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$ donde:

$$T_n = \frac{(3n+1)^{\frac{1}{2}}(n+7)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(3n+(n^2+5)^{1/2}\right)(n+3)^n}$$

Solución

Para determinar la convergencia ó divergencia de la sucesión calcularemos el límite de T_n, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^{\frac{1}{2}}(n+7)^{n+\frac{1}{2}}}{(3n+(n^2+5)^{\frac{1}{2}})(n+3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+7)^n\sqrt{3n+1}\sqrt{n+7}}{(n+3)^n(3n+\sqrt{n^2+5})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\frac{n+7}{n+3})^n \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}\sqrt{n+7}}{3n+\sqrt{n^2+5}}$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{n\to\infty}((1+\frac{4}{n+3})^{\frac{n+3}{4}})^{\frac{4n}{n+3}} . \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n}}\sqrt{1+\frac{7}{n}}}{3+\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+3}} \frac{\sqrt{3+0}\sqrt{1+0}}{3+\sqrt{1+0}} = e^4\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \frac{\sqrt{3}}{4}e^4$, por lo tanto la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

(7) Calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2+4n})^{\frac{n^2-1}{n}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2+4n})^{\frac{n^2-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{3-4n}{n^2+4n})^{\frac{n^2+4n}{3-4n}}]^{\frac{(3-4n)}{n^2+4n}\frac{n^2-1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-4n}{n^2+4n}.\frac{n^2-1}{n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^3+3n^2+4n-3}{n^3+4n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}} = \frac{e^{-1+0}}{1+0} = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2+4n})^{\frac{n^2-1}{n}} = \frac{1}{e}$$

8 Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}+x\operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n$

Solución

Sea $z=\frac{a}{n}$ de donde: $n=\frac{a}{z}$, Cuando $n\to\infty\Leftrightarrow z\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}+x\operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{z\to\infty}\left(\cos z+x\operatorname{sen}z\right)^{\frac{a}{z}}=\lim_{z\to\infty}\left[1+\left(\cos z-1+x\operatorname{sen}z\right)\right]^{\frac{a}{z}}$$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\left(1+\left(\cos z-1+x\operatorname{sen}z\right)\right)^{\frac{1}{\cos z-1+x\operatorname{sen}z}}\right]^{\frac{a(\cos z-1+x\operatorname{sen}z)}{z}}$$

$$=e^{a.\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z-1+x\operatorname{sen}z}{z}}=e^{a.\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{-1-\cos z}{z}+x\frac{\operatorname{sen}z}{z}\right)}=e^{a(-0+x)}=e^{ax}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}+x\operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n=e^{ax}$$

9 Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n+n^2\right)^{\frac{1}{n}}$

Solución

Aplicando la propiedad $e^{\ln a}=a$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+n^2\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n+n^2)}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2n}{1+n+n^2}}=e^0=1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(1+n+n^2\right)^{\frac{1}{n}}=1$$

10 Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos^n\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos^n\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\cos\frac{1}{n})(1+\cos\frac{1}{n}+\cos^2\frac{1}{n}+...+\cos^{n-1}\frac{1}{n})}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2n}.\cos\frac{1}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2n}(1+\cos\frac{1}{n}+\cos^2\frac{1}{n}+...+\cos^{n-1}\frac{1}{n})}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2n}.\cos\frac{1}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{2n}\frac{(1+\cos\frac{1}{n}+\cos^2\frac{1}{n}+...+\cos^{n-1}\frac{1}{n})}{\cos\frac{1}{2n}}$$

$$=0\frac{(1+1+1+...+1)}{1}=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos^n\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}=0$$

(11) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+9n^2}}(\frac{5n^2}{4+n}+\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+...+\frac{2n}{3n+1})$

Solución

En el presente ejercicio aplicaremos el teorema de la media aritmética.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+9n^2}}(\frac{5n^2}{4+n}+\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+...+\frac{2n}{3n+1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{\sqrt{1+9n^2}\,(4+n)}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+9n^2}}(\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+...+\frac{2n}{3n+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}(\frac{4}{n}+1)}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}} \frac{(\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+...+\frac{2n}{3n+1})}{n}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{9+0(0+1)}} + \frac{1}{\sqrt{9+0}}.\frac{2}{3} = \frac{5}{3}+\frac{2}{9} = \frac{17}{9}, \text{ donde: } \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

(12) Hallar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)})^n (\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}...\frac{5n-2}{3n-1})}$

Solución

En el presente ejercicio aplicaremos el teorema de la media geométrica.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)})^n (\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}...\frac{5n-2}{3n-1})} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)}. \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}...\frac{5n-2}{3n-1}}$$

$$= (1).(1).\frac{5}{3} = \frac{5}{3}, \text{ donde: } = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4n)}{\ln(10n)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}...\frac{5n-2}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{3n-1} = \frac{5}{3}$$

(13) Calcular $\lim_{n\to\infty} \text{sen}(2\pi\cos\frac{2}{n})(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)})$

Solución

Sea $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

en el cálculo de este límite aplicamos el teorema de la media aritmética.

$$\lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right).\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right) \qquad \textbf{...(1)}$$

Ahora calculamos cada uno de los límites.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right) = 1$$ (por el teorema de la media aritmética)

Sea $z=\frac{2}{n} \Rightarrow n=\frac{2}{z}$, cuando $n\to\infty \Rightarrow z\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{2}{z}\text{sen}\left(2\pi\cos z\right) = 2\lim_{z\to 0}\frac{-2\pi\cos(2\pi\cos z)\,\text{sen}\, z}{1}$$

$$= -4\pi\cos(2\pi).\ 0 = 0$$

Luego estos límites reemplazamos en **(1)** se tiene.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right) = (0)(1) = 0$$

(14) Calcular $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}$

Solución

En el presente ejercicio aplicaremos el criterio de la suma de Riemann es decir:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}).\frac{1}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(n^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}.\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big/_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

15 Hallar $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(tg(\frac{\pi}{4n})+tg(\frac{2\pi}{4n})+...+tg(\frac{n\pi}{4n}))$

Solución

Aplicando la suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(tg(\frac{\pi}{4n})+tg(\frac{2\pi}{4n})+...+tg(\frac{n\pi}{4n})) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} tg(\frac{i\pi}{4n}).\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 tg\frac{\pi x}{4}dx = -\frac{4}{\pi}\ln|\cos\frac{\pi x}{4}|\Big/_0^1$$

$$= -\frac{4}{\pi}[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln 1] = -\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi}\ln 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(tg\frac{\pi}{4n}+tg\frac{2\pi}{4n}+...+tg\frac{n\pi}{4n}) = \frac{2}{\pi}\ln 2$$

(16) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(a+\frac{1}{n})+\ln(a+\frac{2}{n})+...+\ln(a+\frac{n}{n})]$, a > 0

Solución

Aplicando la suma de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(a+\frac{1}{n})+\ln(a+\frac{2}{n})+...+\ln(a+\frac{n}{n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n}\ln(a+\frac{i}{n}).\frac{i}{n}=\int_0^1\ln(a+x)dx \qquad \textbf{... (1)}$$

Ahora integrando por partes se tiene:

$$\text{Sea}\ \begin{cases} u=\ln(a+x) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x+a} \\ v=x \end{cases}$$

$$\int\ln(a+x)dx=x\ln(a+x)-\int\frac{x}{x+a}dx=x\ln(a+x)-\int(1-\frac{a}{x+a})dx$$

$$= x \ln (a + x) - x + a \ln (x + a) = (x + a) \ln (x + a) - x \qquad \textbf{... (2)}$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(a+\frac{1}{n})+\ln(a+\frac{2}{n})+...+\ln(a+\frac{n}{n})]=\int_0^1\ln(a+x)dx$$

$$=[(x+a)\ln(x+a)-x]\Big/_0^1 = ((a+1)\ln(a+1)-1)-(a\ln a-0)$$

$$= (a + 1) \ln (a + 1) - a \ln a - 1$$

(17) Calcular $\lim_{n\to\infty}[\frac{n^{500}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{500}}{(n+2)^{501}}+...+\frac{n^{500}}{(n+n)^{501}}]$

Solución

Aplicando la suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n^{500}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{500}}{(n+2)^{501}}+...+\frac{n^{500}}{(n+n)^{501}}]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{n^{501}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{501}}{(n+2)^{501}}+...+\frac{n^{501}}{(n+n)^{501}}].\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(\frac{n}{n+1})^{500}+(\frac{n}{n+2})^{501}+...+(\frac{n}{n+n})^{501}].\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{501}}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^{501}}+...+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^{501}}]=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^{501}}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^{501}}$$

$$=-\frac{1}{500(x+1)^{500}}\Big/_0^1=-\frac{1}{500}(\frac{1}{2^{500}}-1)=\frac{1}{500}(1-\frac{1}{2^{500}})$$

(18) Calcular $\lim_{n\to\infty}a_n$, donde a_n es dado por:

$$a_n=\frac{\ln(\frac{1+20n}{n})}{1+20n}+\frac{\ln(\frac{2+20n}{n})}{2+20n}+...+\frac{\ln(21)}{n+20n}$$

Solución

Aplicando la suma de Riemann se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(\frac{1+20n}{n})}{1+20n}+\frac{\ln(\frac{2+20n}{n})}{2+20n}+\dots+\frac{\ln(21)}{n+20n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(20+\frac{1}{n})}{20+\frac{1}{n}}+\frac{\ln(20+\frac{2}{n})}{20+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{\ln(20+\frac{n}{n})}{20+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(20+\frac{i}{n})}{20+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{\ln(20+x)}{20x}dx$$

$$=\frac{\ln^2(20+x)}{2}\Big/_0^1=\frac{1}{2}[\ln^2 21-\ln^2 20]$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}[\ln^2 21-\ln^2 20]$$

(19) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(sen\frac{3}{n})e^{\frac{1}{n}}}{sen\frac{1}{n}}+\frac{(sen\frac{6}{n})e^{\frac{2}{n}}}{sen\frac{2}{n}}+\dots+\frac{(sen\frac{n}{n})e^{\frac{n}{n}}}{sen(\frac{n}{n})}\right]$

Solución

Sea $a_n=\left[\frac{(sen\frac{3}{n})e^{\frac{1}{n}}}{sen\frac{1}{n}}+\frac{(sen\frac{6}{n})e^{\frac{2}{n}}}{sen\frac{2}{n}}+\dots+\frac{(sen\frac{n}{n})e^{\frac{n}{n}}}{sen(\frac{n}{n})}\right]\frac{1}{n}$

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{sen3(\frac{i}{n})e^{\frac{i}{n}}}{sen\frac{i}{n}}.\frac{1}{n}$$, ahora tomando límite.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{sen3(\frac{i}{n})e^{\frac{i}{n}}}{sen\frac{i}{n}}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{sen\,3x}{sen\,x}e^x=\int_0^1\frac{3sen\,x-4sen^3x}{sen\,x}dx$$

$$=\int_0^1 3e^x dx-\int_0^1 4sen^2x.e^x dx=\int_0^1 3e^x dx-4\int_0^1\frac{e^x(1-\cos 2x)}{2}dx$$

$$=\int_0^1 e^x dx+2\int_0^1 e^x\cos 2x\,dx=[e^x+\frac{2}{5}(e^x\cos 2x+2e^x sen\,2x)]\Big/_0^1$$

$$=\frac{1}{5}(5e-7+2e\cos 2x+4esen\,2x)$$

(20) Verificar que:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{1+2n+2n^2}+\frac{n}{4+4n+2n^2}+...+\frac{n}{n^2+2n(n)+2n^2}]=arctg(\frac{1}{3})$$

Solución

Sea $a_n=\frac{n}{1+2n+2n^2}+\frac{n}{4+4n+2n^2}+...+\frac{n}{n^2+2n(n)+2n^2}$

Dividiendo entre n^2 al numerador y denominador

$$a_n = \left[\frac{1}{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{2+2(\frac{2}{n})+\frac{4}{n^2}} + \dots + \frac{1}{2+2n(\frac{n}{n})+\frac{n^2}{n^2}}\right]\frac{1}{n}$$

$$a_n = \left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+2(\frac{1}{n})+2} + \frac{1}{(\frac{2}{n})^2+2(\frac{2}{n})+2} + \dots + \frac{1}{(\frac{n}{n})^2+2(\frac{n}{n})+2}\right]\frac{1}{n}$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(\frac{i}{n})^2+2(\frac{i}{n})+2}\right).\frac{1}{n}$$, ahora tomamos límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\frac{i}{n})^2+2(\frac{i}{n})+2}.\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+1} = arctg(x+1)\Big/_0^1 = arctg2 - arctg1 = arctg(\frac{1}{3})$$

NOTA.- $\begin{cases} z = arctg\,2 \\ y = arctg\,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\,z = 2 \\ tg\,y = 1 \end{cases}$

$$tg(z-y) = \frac{tg\,z - tg\,y}{1+tg\,y.tg\,z} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} = tg(z-y) = \frac{1}{3} \Rightarrow z-y = arctg(\frac{1}{3})$$

$$= arctg\,2 - arctg\,1 = arctg\frac{1}{3}$$

(21) Probar que: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}=0+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right).\frac{1}{n}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)\Big/_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$$

(22) Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\dots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\Big/_0^1$$

$$=arctg\,1-arctg\,0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]=\frac{\pi}{4}$$

(23) Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{arctg(\frac{1}{n})}{1+n}+\frac{arctg(\frac{2}{n})}{2+n}+...+\frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{arctg(\frac{1}{n})}{1+n}+\frac{arctg(\frac{2}{n})}{2+n}+...+\frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{arctg\frac{1}{n}}{1+n}+\frac{arctg\frac{2}{n}}{2+n}+...+\frac{arctg\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{arctg(\frac{i}{n})}{1+(\frac{i}{n})}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{arctg\,x}{1+x}dx \quad ...(1)$$

Integrando por partes se tiene: $\begin{cases} u=arctg\,x \\ dv=\frac{dx}{1+x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{1+x^2} \\ v=\ln(1+x)\end{cases}$

$$\int_0^1\frac{arctg\,x}{1+x}dx=arctg\,x.\ln(1+x)\Big/_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx \quad ...(2)$$

Ahora haremos x = tg θ ⇒ $dx=\sec^2\theta\,d\theta$, para x = 0; θ = 0, x = 1; $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+tg\theta)}{1+tg^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+tg\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg\theta)d\theta$$

Como $1+tg\theta = \dfrac{\cos\theta + sen\theta}{\cos\theta} = \dfrac{sen(\frac{\pi}{2}-\theta)+sen\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{2sen\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-0)}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg\,\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta))d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\theta\, d\theta$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta))d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\theta)d\theta \qquad \textbf{... (3)}$$

Sea $u = \frac{\pi}{4}-\theta \Rightarrow du = -d\theta,\ \theta = 0;\ u = \frac{\pi}{4};\ \theta = \frac{\pi}{4};\ u = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta))d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(\cos u)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)du \qquad \textbf{... (4)}$$

Ahora reemplazamos (4) en (3) se tiene:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi\ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\theta)d\theta = \frac{\pi\ln 2}{8} \qquad \textbf{... (5)}$$

Ahora reemplazamos (5) en (2) se tiene:

$$\int_0^1 \frac{arctg\,x}{1+x}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi \ln 2}{8} = \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \ldots (6)$$

Por último reemplazando (6) en (1) se tiene:

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{arctg\frac{1}{n}}{1+n} + \frac{arctg\frac{2}{n}}{2+n} + \ldots + \frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right) = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

(24) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$, donde: $b_n = \sqrt[n]{u_1^{u_1}.u_2^{u_2}\ldots u_n^{u_n}}$, con $u_P = 1 + \frac{P}{n}$, calcular su límite si es convergente.

Solución

Sea $k = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \ln k = \ln(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(b_n)$

$$\ln k = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{u_1^{u_1}.u_2^{u_2}\ldots u_n^{u_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(u_1^{u_1}.u_2^{u_2}\ldots u_n^{u_n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[u_1 \ln u_1 + u_2 \ln u_2 + \ldots + u_n \ln u_n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(1+\frac{1}{n})\ln(1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{2}{n})\ln(1+\frac{2}{n}) + \ldots + (1+\frac{n}{n})\ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (1+\frac{i}{n})\ln(1+\frac{i}{n}).\frac{1}{n} = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x)dx$$

$$\ln k = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x)dx = [\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \frac{(x+1)^2}{4}]\Big/_0^1 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\ln k = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \Rightarrow k = e^{2\ln 2 - \frac{3}{4}} = 4e^{-\frac{3}{4}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1^{u_1}.u_2^{u_2}...u_n^{u_n}} = 4e^{-\frac{3}{4}}$$

25 Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+b)(an+2n)...(an+nb)}$

Solución

Sea $b_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+b)(an+2b)...(an+nb)}$

$$b_n = \sqrt[n]{(a+\frac{b}{n})(a+\frac{2}{n}b)...(a+\frac{2}{n}b)}$$

$$\ln(b_n) = \frac{1}{n}[\ln(a+\frac{b}{n}) + \ln(a+\frac{2}{n}b) + ... + \ln(a+\frac{n}{n}b)]$$

$\ln(b_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a+\frac{i}{n}b)\frac{1}{n}$, tomando límite $\lim_{n\to\infty} \ln(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(a+\frac{i}{n}b).\frac{1}{n}$

$$\ln(\lim_{n\to\infty} b_n) = \int_0^1 \ln(a+bx)dx = [x\ln(a+bx) + \frac{a}{b}\ln(a+bx) - x]\Big/_0^1$$

$$= \ln(a+b) + \frac{a}{b}\ln(a+b) - 1 - \frac{a}{b}\ln a - \ln(a+b) + \frac{a}{b}\ln(\frac{a+b}{a}) - 1$$

$$= \frac{1}{b}[\ln(a+b)^a + \ln(\frac{a+b}{a})^a] - 1 = \frac{1}{b}\ln(\frac{(a+b)^b(a+b)^a}{a^a}) - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(b_n) = \ln\sqrt[n]{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a.e^b}} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt[n]{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a.e^b}} = \frac{(a+b)^{1+\frac{a}{b}}}{a^{\frac{a}{b}}.e}$$

(26) Calcular $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}...\cos\frac{a}{2^n}$

Solución

Sea sen 2a = 2 sen a.cos a $\Rightarrow$ $\cos a = \dfrac{\text{sen } 2a}{2 \text{sen } a}$.

$$\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}...\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\text{sen } a}{2\text{sen }\frac{a}{2}}.\frac{\text{sen }\frac{a}{2}}{2\text{sen }\frac{a}{2^2}}.\frac{\text{sen }\frac{a}{2^2}}{2\text{sen }\frac{a}{2^3}}...\frac{\text{sen }\frac{a}{2^{n-1}}}{2\text{sen }\frac{a}{2^n}}$$

$$= \frac{\text{sen } a}{2^n \text{ sen }\frac{a}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}...\cos\frac{a}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen } a}{2^n \text{ sen }\frac{a}{2^n}} \qquad \text{... (1)}$$

Sea $Z = \dfrac{a}{2^n} \Rightarrow \dfrac{z}{a} = \dfrac{1}{2^n}$, cuando n $\to\infty \Leftrightarrow$ z $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen } a}{2^n \text{ sen }\frac{a}{2^n}} = \text{sen } a.\lim_{z\to 0} \frac{z}{a \text{ sen } z} = \frac{\text{sen } a}{a}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\text{sen } z} = \frac{\text{sen } a}{a}(1) = \frac{\text{sen } a}{a} \qquad \text{... (2)}$$

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}...\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} a}{a}$$

(27) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_{i=1}^{n} (1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^i})$

Solución

Sea $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$$\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} = (1-\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x \text{ , de donde: } 1-\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{i=1}^{n}(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^i}) = \lim_{n\to\infty}(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2})(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2})...(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos a}{\cos^2\frac{a}{2}}.\frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2^2}}...\frac{\cos(\frac{a}{2^{n-1}})}{\cos^2\frac{a}{2^n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos a}{\cos(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2^2})...\cos^2\frac{a}{2^n}}$$

$$= \cos.a.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}}.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}...\cos\frac{a}{2^n}} = \cos.a(1)(\frac{a}{\operatorname{sen} a}) = \frac{a}{\operatorname{tg} a}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \pi_{i=1}^{n}(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^i}) = \frac{a}{\operatorname{tg} a}$$

(28) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Solución

Este límite se obtiene acotando, es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{cases}$$

sumando

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Ahora tomando límite se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$1 \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

(29) Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$$S_n = 2(\frac{1}{4}) + 3(\frac{1}{4})^2 + 4(\frac{1}{4})^3 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^n$$

Solución

Sea $S_n = 2(\frac{1}{4}) + 3(\frac{1}{4})^2 + 4(\frac{1}{4})^3 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^n$ **... (1)**

Multiplicando por $\frac{1}{4}$ a la expresión **(1)** se tiene:

$\frac{1}{4}S_n = 2(\frac{1}{4})^2 + 3(\frac{1}{4})^3 + 4(\frac{1}{4})^4 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$ **... (2)**

Restando la expresión **(2)** de la expresión **(1)** se tiene:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{4})^4 + \dots + (\frac{1}{4})^n - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots + (\frac{1}{4})^{n-1}] - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2[1 + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + \dots + (\frac{1}{4})^{n-2}] - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2[\frac{1-(\frac{1}{4})^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}] - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}[\frac{4}{3}(1-(\frac{1}{4})^{n-1})] - \frac{4}{3}\frac{(n+1)}{4^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left[\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)\right]-\frac{4}{3}\frac{(n+1)}{4^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left[\frac{4}{3}(1-0)\right]-\frac{4}{3}(0) \;=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-0=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{7}{9}$$

(30) Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$$S_n = \overset{n}{\underset{k=2}{\pi}}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(n^3+1)}$$

Solución

$$S_n = \overset{n}{\underset{k=2}{\pi}}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)...(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)...(n^3+1)}$$

$$S_n=\frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)(4-1)(4^2+4+1)...(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)(4+1)(4^2-4+1)...(n+1)(n^2-n+1)}$$

Como $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$, $(n+1)^3+1=(n+1+1)((n+1)^2-(n+1)+1)$

$$=(n+2)(n^2+n+1)$$

$$S_n = \overset{n}{\underset{k=2}{\pi}}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{1.2.3...(n-2)(n^2-n+1)(n-1)(n^2+n+1)}{9.4.5.6.7...n(n^2-3n+3)(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{1.2.3.4.5...(n-2)(n-1)(n^2+n+1)}{9.4.5.6.7...n(n+1)(n^2-3n+3)}=\frac{1.2.3.(n-2)(n-1)(n^2+n+1)}{9.n(n+1)(n^2-3n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1.2.3.(n-2)(n-1)(n^2+n+1)}{9.n(n+1)(n^2-3n+3)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}$$

(31) Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} + \frac{1}{n}\right] - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left[1 + \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)^2}{n^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^n}\right]\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + (1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{1}{n})^2 + \dots + (1+\frac{1}{n})^n\right)\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{1}{n}) - 1\right)\left(1 + (1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{1}{n})^2 + \dots + (1+\frac{1}{n})^n\right) - \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(1+\frac{1}{n})^n - 1\right] - \frac{1}{n} = e - 1 - 0 = e - 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right) = e - 1$$

(32) Demostrar que: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$

Solución

Aplicando el criterio de la razón para sucesiones convergentes

$$S_n = \frac{2^n n!}{n^n} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n.n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}.n^n.(n+1)!}{2^n(n+1)^{n+1}.n!} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = 2\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{-1}{n+1})^{-(n+1)}]^{-\frac{n}{n+1}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

Luego por el criterio de la razón se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n} = 0$

(33) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)...(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)...(n^2+(2n+1))}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)...(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)...(n^2+(2n+1))}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2})...(1-\frac{n}{n^2})}{(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})(1+\frac{5}{n^2})..(1+\frac{2n+1}{n^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[(1-\frac{1}{n^2})^{-n^2}]^{-\frac{1}{n^2}}[(1-\frac{2}{n^2})^{-\frac{n^2}{2}}]^{-\frac{2}{n^2}}...[(1-\frac{n}{n^2})^{-\frac{n^2}{n}}]^{-\frac{n}{n^2}}}{[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n^2}}[(1+\frac{3}{n^2})^{\frac{n^2}{3}}]^{\frac{3}{n^2}}...[(1+\frac{2n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{2n+1}}]^{\frac{2n+1}{n^2}}}$$

$$= \frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1+3+5+...+(2n+1))}} = \frac{e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} \frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)...(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)...(n^2+(2n+1))} = e^{-\frac{3}{2}}$$

(34) Analizar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$$P_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}...\binom{n}{n}}}$$

<u>Solución</u>

Sea $A = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}...\binom{n}{n}}$, tomando logaritmos en ambos lados

se tiene: $\ln A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\binom{n}{1} + \ln\binom{n}{2} + \ln\binom{n}{3} + ... + \ln\binom{n}{n}}{n^2}$

Por el criterio de STOLZ.

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\ln\binom{n}{1} + \ln\binom{n}{2} + ... + \ln\binom{n}{n}\right] - \left[\ln\binom{n-1}{1} + \ln\binom{n-1}{2} + ... + \ln\binom{n-1}{n-1}\right]}{n^2 - (n-1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n-1}{1}}\right) + \ln\left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{2}}\right) + ... + \ln\left(\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n-1}{n-1}}\right)}{2n-1}$$

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n-1}{1}}\right).\left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{2}}\right)\ldots\left(\frac{\binom{n}{n-1}}{\binom{n-1}{n-1}}\right)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}\right)}{2n-1} \qquad \ldots (1)$$

Calculando el coeficiente $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}$ se tiene:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}} = \frac{(n-1-k)!n!}{(n-k)!(n-1)!} = \frac{n}{n-k} \qquad \ldots. (2)$$

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene:

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}\right)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n-k}\right)\right)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)}{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\right)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln e^n - \ln\sqrt{2\pi n}}{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln n}{2n-1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln A = \frac{1}{2} \text{ ,de donde: } A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\therefore A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n}}} = \sqrt{e}$$

(35) Si $b_1 = 1$, $b_n = \frac{1}{4}(2b_{n-1} + 3)$ para $n \geq 2$, demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 2}$, converge.

Solución

Probaremos que la sucesión es creciente y acotada superiormente:

a) Demostraremos por inducción que $b_n < b_{n+1}$, $\forall$ n.

i) para $n = 2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{4}(2b_1 + 3) = \frac{1}{4}(2 + 3) = \frac{5}{4} \Rightarrow b_1 < b_2$

ii) Supongamos que se cumple $n = h$ (hipótesis inductiva) $b_h < b_{h+1}$

iii) Demostraremos que se cumple para $n = h + 1$, es decir, que se cumple: $b_{h+1} < b_{h+2}$, entonces:

Como $b_{h+1} < b_{h+2} \Rightarrow \frac{1}{2}b_n < \frac{1}{2}b_{h+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{4} < \frac{1}{2}b_{h+1} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(2b_n + 3) < \frac{1}{4}(2b_{h+1} + 3)$$

entonces $b_{h+1} < b_{h+2}$, cumple, por lo tanto : $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es creciente.

b) Demostraremos que $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente ó sea $b_n < 2$.

i) Si $n = 2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{4}(2 + 3) = \frac{5}{4} < 2$, cumple.

ii) Supongamos que se cumple $b_h < 2$ (hipótesis inductiva)

Demostraremos que: $b_{h+1} < 2$ es decir:

$$b_h < 2 \Rightarrow 2b_h < 4 \Rightarrow 2b_h + 3 < 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(2b_h + 3) < \frac{7}{4} < 2 \Rightarrow b_{h+1} < 2$$

$\therefore \{b_n\}_{n>1}$ es acotada.

c) Calculando el límite se tiene:

Sea $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{\to\infty} \frac{1}{4}(2b_{n-1} + 3)$

$b = \frac{1}{4}(2 \lim\limits_{n\to\infty} b_{n-1} + 3) \Rightarrow b = \frac{1}{4}(2b + 3)$, de donde: $b = \frac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}$$

NOTA.- Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión convergente entonces: $\exists$a , tal que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{n-2} = a$$

(36) Si $b_1 = 2$, $b_n = \frac{1}{6}(2b_{n-1} + 3)$, analizar la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ y si converge calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Solución

$b_1 = 2$, $b_n = \frac{1}{6}(2b_{n-1} + 3)$. Demostraremos que se trata de una sucesión de (CAUCHY). primeramente observamos que:

$$b_2 - b_1 = \frac{1}{6}(2b_1 + 3) - 2 = \frac{7}{6} - 2 = -\frac{5}{6}, \text{ entonces: } |b_2 - b_1| = \frac{1}{3}.\frac{5}{2}$$

$$|b_3 - b_2| = \left|\frac{1}{6}(2b_2 + 3) - \frac{1}{6}(2b_1 + 3)\right| = \frac{1}{3}|b_2 - b_1| \Rightarrow |b_3 - b_2| = \frac{1}{3^2}.\frac{5}{2}$$

.

.

.

$$|b_n - b_{n-1}| = \frac{1}{6}(2b_{n-1} + 3) - \frac{1}{6}(2b_{n-2} + 3)$$

$$= \frac{1}{3}(b_{n-1} - b_{n-2}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3^{n-1}}.\frac{5}{2} = \frac{1}{3^n}.\frac{5}{2} \quad \Rightarrow |b_n - b_{n-1}| = \frac{1}{3^n}.\frac{5}{2}.$$

Además $|b_n - b_j| < |b_{n+1} - b_n|$; $\forall$ j > n + 1 **... (1)**

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{3^n.2} = 0$, entonces $\forall$ ε > 0, $\exists$ M> 0, tal que: $\left|\frac{5}{3^n.2} - 0\right| < \varepsilon$, $\forall$ n > M,

es decir $\frac{5}{3^n.2} < \varepsilon \Rightarrow 3^n > \frac{5}{2\varepsilon}$, entonces:

$$n\ln 3 > \ln\left(\frac{5}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{5}{2\varepsilon}\right)}{\ln 3} = M_1 \qquad \textbf{... (2)}$$

entonces : $\forall$ n, j > M, tenemos de **(1)** y **(2)** , $|b_n - b_j| \le \frac{5}{3^n.2} < \varepsilon$.

Por lo tanto, la sucesión $\{b_n\}_{n\ge1}$, es una sucesión de Cauchy y por consiguiente es convergente.

También que $b_{n+1} - b_n < 0$ es decir, $b_{n+1} < b_n$ entonces: $\{b_n\}_{n\ge1}$ es una sucesión decreciente.

Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, hacemos $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$, entonces:

$$r = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(2b_n + 3) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} b_n + \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{3}r + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2r}{3} = \frac{1}{2}$$

Entonces $r = \dfrac{3}{4}$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{3}{4}$

(37) Determinar si la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}_{n\geq 1}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución

Sea $S_n = \dfrac{n}{2^n} \Rightarrow S_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$, $\forall$ n $\in Z^+$, n > 1, sumando n se tiene:

2n > n + 1 de donde al multiplicar por $\dfrac{1}{2^n}$ se tiene: $\dfrac{n}{2^n} > \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$, lo que es lo mismo escribir en la forma:

$\dfrac{n+1}{2^{n+1}} < \dfrac{n}{2^n}$, de donde: se tiene $S_{n+1} < S_n$ $\forall$ n > 1,por lo tanto la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}_{n\geq 1}$, es decreciente.

(38) Probar la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... , converge a 2.

Solución

A la sucesión dada expresaremos así:

$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2a_1}$, $a_3 = \sqrt{2a_2}$, ..., $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, n > 1.

Ahora demostraremos que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y acotada superiormente por 2.

La demostración lo haremos por inducción matemática.

i) para n =1, $a_1 = \sqrt{2} < 2$ y $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$

ii) Suponiendo que para n = h, $a_h < 2$ y $a_h < a_{h+1}$

iii) Probaremos para n = h + 1

$a_{h+1} = \sqrt{2a_h} \le \sqrt{4} = 2$, pues $2a_h \le 4$ (hipótesis inductiva)

$\Rightarrow a_{h+1} \le 2$ y $a_{h+1} = \sqrt{2a_h} \le \sqrt{2a_{h+1}} = a_{h+2}$ pues $2a_h \le 2a_{h+1}$ (hipótesis inductiva), entonces: $a_{h+1} \le a_{h+2}$. Luego la sucesión $\{a_n\}_{n\ge 1}$ converge a 2.

(39) Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión definida por $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = (2 + x_n)^{\frac{1}{2}}$, n ∈ Z^+

Solución

Sea $x_1 = \sqrt{2}$

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}$$

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+x_2}$$

.
.
.

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} \text{, para n > 1.}$$

Ahora veremos si $\{x_n\}_{n\ge 1}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente.

Se observa que: $x_1 = \sqrt{2} < 2$

$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$, donde: $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$

$x_3 = \sqrt{2+x_2} < 2$,donde: $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = x_3$

es decir, que: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, luego $\{x_n\}_{n\geq 1}$, es no decreciente.

Ahora demostraremos que es acotada superiormente por 2, probaremos esto por inducción matemática.

Sea $n \in Z^+$ tal que: $x_n \leq 2$ y $x_n \leq x_{n+1}$

i) $1 \in Z^+$

ii) Suponemos que $h \in Z^+$ es decir: $x_h \leq 2$ y $x_h \leq x_{h+1}$. entonces:

$x_{h+1} = \sqrt{2+x_h} \leq \sqrt{2+2} = 2$ y $x_{h+1} = \sqrt{x_{h+1}^2} = \sqrt{2+x_h} \leq \sqrt{2+x_{h+1}} = x_{h+2}$

Por hipótesis inductiva, es decir: $h \in Z^+ \Rightarrow h+1 \in Z^+$ esto demuestra que: $\{x_n\}_{n\geq 1}$, es no decreciente y acotada superiormente, entonces es $\{x_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y desde que $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a \Rightarrow a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 2$ y $a = -1$

Luego se toma a = 2 por ser sucesión de términos positivos

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

(40) Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en R, definida por: $u_1 = 1$, $u_2 = 2,\dots,u_n = \frac{1}{2}(u_{n-2}+u_{n-1})$, para n > 2. Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión y en caso de convergencia halle $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Solución

Por definición de la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ se tiene

- $u_1 = 1$

$u_2 = 2$ además $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-2}+u_{n-1})$

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_2+u_1) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(u_3+u_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right) = \frac{7}{2^2}$$

$$u_5 = \frac{1}{2}\left(u_4+u_3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2^2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{2^3}$$

$$u_6 = \frac{1}{2}\left(u_5+u_4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2^2}+\frac{13}{2^3}\right) = \frac{27}{2^4}$$

$$u_7 = \frac{1}{2}\left(u_6+u_5\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{2^4}+\frac{13}{2^3}\right) = \frac{53}{2^5}\ ,\ \dots$$

$|u_2-u_1| = 1$, $|u_3-u_2| = \frac{1}{2}$, $|u_4-u_3| = \frac{1}{2^2}$, $|u_5-u_4| = \frac{1}{2^3}$, $|u_6-u_5| = \frac{1}{2^4}$, $|u_7-u_6| = \frac{1}{2^5},\dots,|u_{n+1}-u_n| = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n}$ como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2^n} = 0$, entonces, podemos encontrar n tal que: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, entonces $\forall$ n, j > M.

Tenemos $|a_n - a_j| < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, luego $\{u_n\}_{n\geq 1}$,es una sucesión de cauchy, esto es que ∀ ε > 0, ∃ M > 0 / n, j > M.

$$\Rightarrow |a_n - a_j| < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{2}{\varepsilon} \text{ donde: } n\ln 2 > \ln\frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{\ln(\frac{2}{\varepsilon})}{\ln 2} = M > 0$$

por consiguiente $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es convergente

TEOREMA.- Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge al mismo punto.

Hallaremos una subsucesión de $\{u_n\}_{n\geq 1}$.

$$u_1 = 1,\ u_3 = 1 + \frac{1}{2},\ u_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3},\ u_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$u_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}\right) = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - (\frac{1}{4})^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3}\left(1-(\frac{1}{4})^n\right)\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Luego por la conservación anterior se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{5}{3}$

(41) La sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ está definida como sigue: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{5u_1}, \dots,\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$, analizar si $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es monótona y acotada, calcular el límite si existe.

Solución

Primero veremos si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona, como

$u_1 = 1,\ u_2 = \sqrt{5u_1},\ u_3 = \sqrt{5u_2},\dots,\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$, entonces :

$u_1 = 1,\ u_2 = \sqrt{5},\ u_3 = \sqrt{5\sqrt{5}},\ u_4 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},\dots$ es decir: $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < \dots$

Luego la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona creciente.

Ahora veremos si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, de la definición tenemos: $u_n \geq 1,\ \forall$ n $\in Z^+$ además como : $\sqrt{5} < 5 \Rightarrow 5\sqrt{5} < 25 \Rightarrow \sqrt{5\sqrt{5}} < 5$

$$\Rightarrow 5\sqrt{5\sqrt{5}} < 25 \Rightarrow \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} < 5,\dots,\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{\dots\sqrt{5}}}} < 5$$

entonces: $u_n < 5$. es decir: $1 \leq u_n < 5,\ \forall$ n $\in Z^+$.

Luego $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, por consiguiente la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es convergente, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 5$, pues la sucesión es creciente.

También podemos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, haciendo $r = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, y como $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{5u_n} \Rightarrow r = \sqrt{5r} \Rightarrow r^2 = 5r$, de donde: r = 0 $\vee$ r = 5, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 5$, no puede ser cero ("0") pues la sucesión es creciente y $u_n \geq 1$, $\forall$ n $\in Z^+$.

(42) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}$

Solución

Para calcular este límite aplicamos el criterio de STOLZ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=L$$

$$\begin{cases}a_n=1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2\\ b_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{n-1}=1^2+3^2+5^2+...+(2n-3)^2\\ b_{n-1}=1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2\end{cases}$$

$$a_n-a_{n-1}=(2n-1)^2;\quad b_n-b_{n-1}=n^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^2}=4$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}=4$$

(43) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}(\cos\frac{t}{n})^n$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}(\cos\frac{t}{n})^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{n})^n \qquad ...(1)$$

Calculando $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}$ (por el criterio de STOLZ)

$$\begin{cases}a_n=1+4+7+...+(3n-2)\\ b_n=n^2+7n+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{n-1}=1+4+7+...+(3n-5)\\ b_{n-1}=n^2+5n-5\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+6}=\frac{3}{2} \quad ...(2)$$

Sea $z=\frac{t}{n} \Rightarrow n=\frac{t}{z}$, cuando n $\to\infty$, z $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{n})^n=\lim_{z\to 0}(\cos z)^{\frac{t}{z}}=\lim_{z\to 0}[(1+(\cos z-1))^{\frac{1}{\cos z-1}}]^{\frac{t(\cos z-1)}{z}}$$

$$=e^{\lim\limits_{z\to 0} t(\frac{\cos z-1}{z})}=e^0=1 \quad ...(3)$$

Ahora reemplazamos **(2)** y **(3)** en **(1)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}(\cos\frac{t}{n})^n=(\frac{3}{2})(1)=\frac{3}{2}$$

44 Analizar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ donde

$$u_n=\sqrt[n]{\frac{30^n+40^n+...+600^n}{n}}$$

Solución

$\forall$ n $\in Z^+$, $30^n\leq 40^n$, $40^n\leq 50^n$,...., $590^n\leq 600^n$

$$600^n\leq\frac{30^n+40^n+...+600^n}{n}\leq 58x600^n$$, donde: 58 es el número de sumandos

$$\Rightarrow 600\leq\sqrt[n]{\frac{30^n+40^n+...+600^n}{n}}\leq 600x58^{\frac{1}{n}}$$

Luego según el teorema del encaje **(1.8)** se tiene :

$$\lim_{n\to\infty}600=\lim_{n\to\infty}600x58^{\frac{1}{n}}=600 \quad \text{de donde : } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{30^n+40^n+...+600^n}{n}}=600$$

por lo tanto la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

(45) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+n^2}}{3n^2+5n-2}$

Solución

$$\begin{cases} a_n=\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+n^2} \\ b_n=3n^2+5n-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n-1}=\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+(n-1)^2} \\ b_{n-1}=3n^2-n-5 \end{cases}$$

Ahora aplicamos el criterio de STOLZ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}}{6n+2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+n^2}}{3n^2+5n-2}=\frac{1}{6}$$

(46) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)...\left(1+\cos\frac{n\pi}{n}\right)\right]$

Solución

Aplicando Riemann se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)...\left(1+\cos\frac{n\pi}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\ln\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)+\ln\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)+...+\ln\left(1+\cos\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx \qquad ...(1)$$

Ahora calculamos la integral $\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx$, mediante la introducción de un parámetro.

Sea $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx$, derivando con respecto a α.

$$F'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x}dx \quad \text{(integración de función racional de seno y coseno)}$$

Sea $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z \Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

para $x=0,\ z=0\ ;\ x=\pi,\ z\to\infty$

$$F'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x dx}{1+\alpha\cos x}=\int_0^{\infty}\frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\alpha(\frac{1-z^2}{1+z^2})}\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{(1-z^2)dz}{[1+z^2+\alpha(1-z^2)](1+z^2)}=-2\int_0^{\infty}\frac{(z^2-1)dz}{[1+\alpha+(1-\alpha)z^2](1+z^2)}$$

$$=-\frac{2}{1-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{(z^2-1)dz}{(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+z^2)(1+z^2)}=\frac{2}{\alpha-1}\int_0^{\infty}\frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)} \quad \text{... (1)}$$

donde: $a=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$

calculando la integral $\int\frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)}$

$$\int\frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)}=\int(\frac{Az+B}{z^2+a^2}+\frac{Cz+D}{z^2+1})dz \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{z^2-1}{(z^2+a^2)(z^2+1)}=\frac{Az+B}{z^2+a^2}+\frac{Cz+D}{z^2+1}=\frac{(Az+B)(z^2+1)+(Cz+D)(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)(z^2+1)}$$

$$z^2 - 1 = A(z^3 + z) + C(z^3 + a^2 z) + B(z^2 + 1) + D(z^2 + a^2)$$

$$= (A + C)z^3 + (B + D)z^2 + (A + a^2 C)z + B + a^2 D$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 1 \\ A + a^2 C = 0 \\ B + a^2 D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \\ C = 0 \\ D = -\dfrac{2}{a^2 - 1} \end{cases} \qquad \ldots (3)$$

reemplazando **(3)** en **(2)** se tiene:

$$\int \frac{(z^2 - 1)dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + 1)} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \int \frac{dz}{z^2 + a^2} - \frac{2}{a^2 - 1} \int \frac{dz}{z^2 + 1}$$

$$= \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} - \frac{2}{a^2 - 1} \operatorname{arctg} z \qquad \ldots (4)$$

Ahora reemplazamos **(4)** en **(1)**

$$F'(\alpha) = -\frac{2}{1 - \alpha} \left[\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} - \frac{2}{a^2 - 1} \operatorname{arctg} z \right] \Big/_{0}^{\infty}$$

$$= -\frac{2}{1 - \alpha} \left[\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{a^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= -\frac{\pi}{1 - \alpha} \left[\frac{a^2 + 1 - 2a}{(a^2 - 1)a} \right] = -\frac{\pi}{1 - \alpha} \left[\frac{(a - 1)^2}{(a^2 - 1)a} \right]$$

$$F'(\alpha) = -\frac{\pi}{1 - \alpha} \left[\frac{a - 1}{(a + 1)a} \right] = -\frac{\pi}{1 - \alpha} \left[\frac{\sqrt{\dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} - 1}{\dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + \sqrt{\dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha}}} \right]$$

$$= -\frac{\pi}{1-\alpha}\,\frac{\left(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha}\right)\sqrt{1-\alpha}}{1+\alpha+\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1-\alpha}}$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1-\alpha}\right)}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\left(\frac{2\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)}{2\sqrt{1+\alpha}}\right) = -\pi\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\ .$$

Ahora integrado $F(\alpha) = \int\left(\pi - -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha + k$ = π α - π arc.sen α+ k , para calcular k hacemos α = 0.

F(0) = π (0) - π (0) = k = 0 ⇒ k = 0 , de donde: F(α) = π α - π arc.sen α.

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1+\alpha\cos x)dx = \pi\alpha - \pi\,\text{arcsen}\,\alpha$$

$$F(1) = \int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)dx = \pi - \pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{2}$$

(47) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6}{n^7}$, sin usar Riemann.

Solución

Aplicando el criterio de STOLZ, se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = L$, donde:

$$\begin{cases} a_n = 1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6 \\ b_n = n^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n-1} = 1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6 \\ b_{n-1} = (n-1)^7 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{7n^6-21n^5+35n^4-35n^3+21n^2-7n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7-\frac{21}{n}+\frac{35}{n^2}-\frac{35}{n^3}+\frac{21}{n^4}-\frac{7}{n^5}+\frac{1}{n^6}}=\frac{1}{7-0+0-0+0-0+0}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+3^6+...+n^6}{n^7}=\frac{1}{7}$$

(48) Demostrar que: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\frac{1}{P+1}$ Si P > -1.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{n})^P+(\frac{2}{n})^P+...+(\frac{n}{n})^P]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^P.\frac{1}{n}=\int_0^1 x^P dx=\frac{x^{P+1}}{P+1}\Big/_0^1=\frac{1}{P+1}-0=\frac{1}{P+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\frac{1}{P+1}$$

(49) Sea $a\in R$, arbitrario, $u_n(a)=1^a+2^a+...+n^a$. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)}{n\,u_n(a)}$

Solución

$u_n(a)=1^a+2^a+...+n^a$, entonces: $u_n(a+1)=1^{a+1}+2^{a+1}+3^{a+1}+...+n^{a+1}$

$$n\,u_n(a)=n1^a+n2^a+...+n^{a+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)}{n\,u_n(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{a+1}+2^{a+1}+3^{a+1}+...+n^{a+1}}{n1^a+n2^a+...+n^{a+1}}\quad ,\text{ para } a=0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n+n+...+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

Ahora calculamos para a > 0 (aplicando el criterio de STOLZ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)}{n\,u_n(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)-u_{n-1}(a+1)}{n\,u_n(a)-(n-1)u_{n-1}(a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1^{a+1}+2^{a+1}+...+n^{a+1})-(1^{a+1}+2^{a+1}+...+(n-1)^{a+1})}{(n1^a+n2^a+...+n.n^a)-((n-1)1^a+(n-1)2^a+...+(n-1)(n-1)^a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}}{1^a+2^a+...+(n-1)^a+n.n^a}\quad\text{(nuevamente STOLZ)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}-(n-1)^{a+1}}{(1^a+2^a+...+(n-1)^a+n.n^a)-(1^a+2^a+...+(n-2)^a+(n-1)(n-1)^a)}$$

$$=\frac{1+a}{2},\quad a>0.$$

Simplificando: $\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{u_n(a+1)}{nu_n(a)}=\dfrac{(a+1)}{2}\quad ,\quad a>0$

(50) Calcular $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left[\ln\left(\dfrac{1+b\cos\frac{\pi}{n}}{1+a\cos\frac{\pi}{n}}\right)+...+\ln\left(\dfrac{1+b\cos\frac{n\pi}{n}}{1+a\cos\frac{n\pi}{n}}\right)\right]$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\ln\left(\frac{1+b\cos\frac{\pi}{n}}{1+a\cos\frac{\pi}{n}}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{1+b\cos\frac{n\pi}{n}}{1+a\cos\frac{n\pi}{n}}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[(\ln(1+b\cos\frac{\pi}{n})+\ldots+\ln(1+b\cos\frac{n\pi}{n}))-(\ln(1+a\cos\frac{\pi}{n})+\ldots+\ln\left(1+a\cos\frac{n\pi}{n}\right))\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+b\cos\frac{i\pi}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+a\cos\frac{i\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+b\cos\frac{i\pi}{n}).\frac{\pi}{n}-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+a\cos\frac{i\pi}{n}).\frac{\pi}{n}$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1+b\cos x)dx-\int_0^{\pi}\ln(1+a\cos x)dx$$

$$=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{2}\right)-\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\right)=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\ln\left(\frac{1+b\cos\frac{\pi}{n}}{1+a\cos\frac{\pi}{n}}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{1+b\cos\frac{n\pi}{n}}{1+a\cos\frac{n\pi}{n}}\right)\right]=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$$

1.14. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión:

① $\{\frac{n}{n+1}\}_{n\geq 1}$ ② $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}_{n\geq 1}$ ③ $\{\frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\}_{n\geq 1}$

④ $\{\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1.3.5...(2n-1)}\}_{n\geq 1}$ ⑤ $\{\frac{\cos nx}{n^2+n}\}_{n\geq 1}$ ⑥ $\{\frac{n}{3^n+1}\}_{n\geq 1}$

(7) $\{\frac{3n!}{(n-1)!}\}_{n\geq 1}$ (8) $\{\text{sen}\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1}$ (9) $\{5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\}_{n\geq 1}$

II. Escribir la expresión para el n-ésimo término de la sucesión.

(1) 1, 4, 7, 10, ... (2) -1, 2, 7, 14, 23, ... (3) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$

(4) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (5) $2, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \ldots$

(6) $\frac{1}{2.3}, \frac{2}{3.4}, \frac{3}{4.5}, \frac{4}{5.6}, \ldots$ (7) $1, \frac{1}{1.3}, \frac{1}{1.3.5}, \frac{1}{1.3.5.7}, \ldots$

III. Usando la definición de límite **(1.2)** demostrar que:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-2n}{3n+2}=-\frac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2.10^n}{5+3.10^n}=\frac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}=2$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}k=k$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{(-1)^n}{n})=2$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{5n-4}=\frac{4}{5}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+3}=4$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\text{sen}\,n}{n}=0$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n-1}{n^2+n+1}=3$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-n}{2+3n}=-\frac{1}{3}$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}(a+\frac{1}{n^2})=a$

(15) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$

(16) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = 0$

(17) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+8n+1}{5+3n-n^2} = -5$

IV. Calcular los siguientes límites.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^4-5n+4}}{2n^2+n}$ **Rpta:** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n+2})}{8n-4}}$ **Rpta:** $-\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$ **Rpta:** $\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{(1+n)(2+n)^2}$ **Rpta:** $-\frac{1}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}+1-\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ **Rpta:** $e^{-\frac{1}{2}}$

(6) $\lim_{n\to\infty} (\frac{n+a}{n+1})^{2n+3}$ **Rpta:** $e^{2(a-1)}$

(7) $\lim_{n\to\infty} (\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2})^n$ **Rpta:** $\sqrt{ab}$

(8) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+a'n+b'})$ **Rpta:** $\frac{a-a'}{2}$

(9) $\lim_{n\to\infty} \left(2+3n^4\right)^{\frac{1}{3+2\ln(n+1)}}$ **Rpta:** e^4

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3 + an^2} - \sqrt[3]{n^3 - an^2}$ **Rpta:** $\dfrac{2a}{3}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{2n^4 + n - 1}$ **Rpta:** $\dfrac{1}{8}$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}$ **Rpta:** $-\dfrac{3}{2}$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots. + \dfrac{1}{2^n}$ **Rpta:** 1

(14) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\sqrt[n]{\alpha} - n\right)$ **Rpta:** $\ln(\alpha)$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^n)}{n}$ **Rpta:** 1

(16) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos\dfrac{1}{n} - 1\right)$ **Rpta:** $-\dfrac{1}{2}$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2+1)\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)}{(n^2-2)\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}$ **Rpta:** $\dfrac{3}{2}$

(18) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(na)}{\ln(nb)}\right)^{\ln(n)}$ **Rpta:** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

(19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(6+18+30+\ldots+6(2n-1))$ **Rpta:** 6

(20) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right)$ **Rpta:** $\dfrac{3}{2}$

(21) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\sqrt[12]{n}$ **Rpta:** $\frac{3}{4}$

(22) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4.\text{sen}^2(\frac{1}{n})\ln(1+\frac{1}{n})}{(n+2)\cos(\frac{\pi n}{4n+1})}$ **Rpta:** $3\sqrt{2}$

(23) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{n-1}}{\ln(n)}$ **Rpta:** 1

(24) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{\frac{2n-3}{3n+4}})^{(\frac{n^3-1}{n^3+n})^{n^2+1}}$ **Rpta:** $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{5e}}$

(25) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{tg}(\frac{\pi n}{2n+1})}$ **Rpta:** 1

(26) $\lim_{n\to\infty} n(\text{arctg}\, hn)[(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}-(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{4}}]$ **Rpta:** $\frac{\pi\sqrt{e}}{8}$

(27) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^P}\binom{n}{p}$ **Rpta:** $\frac{1}{P!}$

(28) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n}}$ **Rpta:** 0

(29) $\lim_{n\to\infty} \text{tg}(\frac{\frac{n\pi}{2n-1}}{\sqrt[4]{n^4+1}})$ **Rpta:** $-\frac{4}{\pi}$

(30) $\lim_{n\to\infty} [\frac{(\sqrt{a^2})^{1/n}+(\sqrt{ab})^{1/n}+(\sqrt{b^2})^{1/n}}{3}]^n$ **Rpta:** ab

(31) $\lim_{n\to\infty}[3(\frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{4n^3})]^{2n}$ **Rpta:** 1

(32) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n)+\ln(n+1)^{-n}}{\ln(n)}$ **Rpta:** 1

(33) $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}...\cos\frac{\pi}{2^n}$ **Rpta:** $\frac{2}{\pi}$

(34) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1})$ **Rpta:** $\frac{3}{4}$

(35) Determinar el límite de la sucesión.

$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},.......$ **Rpta:** 2

(36) Calcular el límite $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2+4n})^{\frac{n^2-1}{n}}$ **Rpta:** e^{-1}

(37) Calcular $\lim_{n\to\infty}[\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}]^n$, a, b, c > 0

(38) Calcular $\lim_{n\to\infty}a_n$, si $a_n=\frac{(4n+7)^{4n+7}n^{n-5}}{(16n+1)^{2n+2}(n+3)^{3n}}$ **Rpta.** $\frac{64}{e^{\frac{9}{4}}}$

(39) Calcular $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)})$ **Rpta.** 1

(40) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(41) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{sen}(e^{-n})\text{sen}(e^{-2n})\ln(n^4 3n^2 - 2n - 4)}{\text{sen}(\dfrac{1}{1+2e^n})\text{sen}(\dfrac{3}{2+e^{2n}})\ln(n^4 - 4n^3)}$

(42) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n}+1-\sqrt{n+1}]^{\sqrt{n}}$

(43) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n)^{4n}}{(\sum\limits_{k=1}^{n} 4k^3)^n}$

(44) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}]$, a, c > 0

(45) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}$

(46) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{2n^8+5n^6+1}-\sqrt[4]{2n^8-3n^6+5n}$

(47) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+pn+q}-\sqrt{n^2+rn+s}$

V. Calcular los siguientes límites aplicando los criterios que les corresponde.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+...+\dfrac{n+1}{n+2})$ **Rpta:** 1

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5n}(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}+2^{\frac{7}{8}}+...+2^{\frac{2^n-1}{2^n}})$ **Rpta:** $\dfrac{2}{5}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{\sqrt[3]{1-27n^3}} \dfrac{\ln(7n)}{\ln(9n)}(5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{3}{4}}+5^{\frac{7}{8}}+...+5^{\frac{2^n-1}{2^n}})$ **Rpta:** $-\dfrac{35}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sen}(2\pi\cos\dfrac{2}{n})(\dfrac{\ln 2}{\ln 3}+\dfrac{\ln 3}{\ln 4}+...+\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)})$ **Rpta:** 0

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3n^2+2n+1}(\dfrac{1}{6})(\dfrac{3}{12})...(\dfrac{2n-1}{6n})}$ **Rpta:** $\dfrac{1}{3}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n(\frac{\ln 3}{\ln 7}.\frac{\ln 6}{\ln 14}...\frac{\ln 3n}{\ln 7n})}$ **Rpta:** 1

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9n}(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2^3}+...+\sqrt[2n]{2^{2n-1}})$ **Rpta:** $\frac{2}{9}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}$ **Rpta:** 1

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} [\frac{(\sqrt{25})^{\frac{1}{n}}+(\sqrt{40})^{\frac{1}{n}}+(\sqrt{64})^{\frac{1}{n}}}{3}]^n$ **Rpta:** 40

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n}(3^{\frac{2}{4}}+3^{\frac{5}{7}}+3^{\frac{10}{12}}+...+3^{\frac{n^2+1}{n^2+3}})$ **Rpta:** $\frac{3}{7}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{8}.\frac{5}{23}...\frac{n^2+1}{5n^2+1}}$ **Rpta:** $\frac{1}{5}$

VI. Calcular los límites siguientes:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+...+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$ **Rpta:** $\frac{2}{5}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+...+\frac{n}{(n+n)^2})$ **Rpta:** $\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2})$ **Rpta:** $\frac{\pi}{4}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2})$ **Rpta:** $\frac{\ln 2}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}\right)$ **Rpta:** 0

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+...+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}$ **Rpta:** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ **Rpta:** $\ln(1+\sqrt{2})$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2x^2}+\frac{n}{n^2+2^2x^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2x^2}\right)$ $x\neq 0$ **Rpta:** $\frac{\text{arctg}\,x}{x}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\text{sen}\frac{\pi}{2n}.\text{sen}\frac{2\pi}{2n}...\text{sen}\frac{n\pi}{2n}}$ **Rpta:** $\frac{1}{2}$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{P=1}^{n}Pe^{P/n}$ **Rpta:** 1

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{-\frac{1}{n^2}}+2e^{-\frac{4}{n^2}}+...+n.e^{-1}\right)$ **Rpta:** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\text{sen}\frac{\pi}{n}.\cos^2\frac{\pi}{n}+\text{sen}\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{2\pi}{n}+...+\text{sen}\frac{n-1}{n}\pi.\cos^2\frac{n-1}{n}\pi\right]$

Rpta: $-\frac{2}{3\pi}$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+n)}$ **Rpta:** $\frac{4}{e}$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\ln(n)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}+\frac{\ln(\frac{n}{2})}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}}+...+\frac{\ln(\frac{n}{n})}{\sqrt{1-\frac{n}{n}}}\right]$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+...+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}$ **Rpta:** $\dfrac{1}{\alpha+1}$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sen}(\dfrac{n\pi}{n+1})(e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+...+e^{-\frac{n}{n}})$ **Rpta:** $\pi(1-e^{-1})$

(17) Si f(x) es continua en [a,b]. Demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

(18) Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t}{n}(\text{sen}\dfrac{t}{n}+\text{sen}\dfrac{2t}{n}+...+\text{sen}\dfrac{n-1}{n}t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$

(19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}[\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{2^2}{n^2}}+...+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{n^2}{n^2}}]$

Rpta. $\dfrac{b}{2a}\sqrt{a^2-1}+\dfrac{ab}{2}\text{arcsen}\dfrac{1}{a}$

(20) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{n^3}{n^4+1^4}+\dfrac{n^3}{n^4+2^4}+...+\dfrac{n^3}{n^4+n^4}]$

Rpta. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln(3+2\sqrt{2})-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{16}$

(21) Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} e^{100n} sen(e^{-100n}) sen(\frac{n^4}{5n^5-6})[(1+\frac{1}{1})^2+(1+\frac{1}{2})^2+...+(1+\frac{1}{n})^n]$$

(22) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5n}[\sqrt{2}+\sqrt[4]{2^3}+...+\sqrt[2n]{2^{2n-1}}]$

(23) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[1^p + 2^p + ... + n^p][\text{tg}\frac{1}{n}]^{p+1}$

(24) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\frac{\frac{\pi}{n}\text{sen}(\frac{\pi}{n})}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}+\frac{(\frac{2\pi}{n})\text{sen}\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}}+...+\frac{(\frac{n\pi}{n})\text{sen}(\frac{n\pi}{n})}{1+\cos^2\frac{n\pi}{n}}\right]$

(25) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1}+2\sqrt[3]{2}+...+n\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt[3]{n}}$ **Rpta.** $\frac{3}{7}$

(26) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)...4n}$ **Rpta.** $\frac{256}{27e}$

(27) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(a+\frac{1}{n})^3+(a+\frac{2}{n})^3+...+(a+\frac{n}{n})^3]$ **Rpta.** $a^3+\frac{3a^2}{2}$

(28) Calcular el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$, definida como:

$a_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+...+\frac{2n}{n^2+n}$ **Rpta.** $\frac{3}{4}$

VII. Determinar si las sucesiones dadas son convergentes ó divergentes.

(1) $\{\frac{\ln(n)}{n^2}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(2) $\{\frac{e^n}{n}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Diverge.

(3) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(4) $\{\frac{n}{n+1}\text{sen}\frac{\pi n}{2}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Diverge.

(5) $\{\dfrac{4^n}{2^n + 10^6}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Diverge.

(6) $\{\dfrac{2^n}{4^n + 1}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(5) $\{\ln(\dfrac{2^n}{n+1})\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Diverge.

(8) $\{\ln(n) - \ln(n+1)\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(9) $\{\dfrac{\sqrt{n}\,\text{sen}(e^n \pi)}{n+1}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(10) $\{\int_0^1 e^{-nx}dx\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(11) $\{\int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(12) $\{\sqrt{n(n+4)} - n\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(13) $\{\int_{-1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(14) $\{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(15) $\{\dfrac{\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^2+3}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Converge.

(16) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[5]{n}}\right\}_{n\geq 1}$

(17) $\left\{\dfrac{\ln(2+e^{n})}{3n}\right\}_{n\geq 1}$

(18) $\left\{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right\}_{n\geq 1}$

(19) $\left\{\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{(2n)^{n}}\right\}_{n\geq 1}$

(20) $\left\{\dfrac{1.3.5....(2n-1)}{n!}\right\}_{n\geq 1}$

VIII.

A. Demostrar que:

(1) $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{a^{n}}{n!}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=0$, a > 1

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(10{,}000)^{n}}{n!}=0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n}=0$ si 0 < a < 1

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n}}{(n!)^{2}}=0$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n}}{(2n)!}=0$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{n}}{n^{n^2}}=0$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n}+b^{n}+c^{n}}=c$, si a, b, c $\geq$ 0, c > a, c > b

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(a-1)(a-2)...(a-n)x^{n}}{n!}=0$ si $x\in\langle -1,1\rangle$

B. Hallar el límite de las sucesiones siguientes cuyo n-ésimo término es:

(1) $a_n=\dfrac{1}{b}\sqrt[3]{b^2}.\sqrt[9]{b^4}.\sqrt[27]{b^8}......\sqrt[3^n]{b^{2^n}}$ **Rpta:** b

(2) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[5]{n^5+n^4+1}}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[4]{n^4+n^2+1}}$ **Rpta:** $\dfrac{2}{15}$

(3) $a_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+4n^2+1}$ **Rpta:** $-\dfrac{5}{6}$

(4) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ **Rpta:** 0

(5) $\dfrac{1}{1.1}, \dfrac{1}{1.01}, \dfrac{1}{1.001}, \dfrac{1}{1.0001}, \ldots$ **Rpta:** 1

(6) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ **Rpta:** 2

(7) $0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, \ldots$ **Rpta:** $\dfrac{7}{30}$

(8) $\sqrt{2}\ , \sqrt{2\sqrt{2}}\ , \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots,$ **Rpta:** 2

(9) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** $\dfrac{1}{2}$

(10) $\{\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** $\dfrac{1}{3}$

(11) $\{\dfrac{n^{2/3}\operatorname{sen} n!}{n+1}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** 0

C. Si $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$. Calcule los siguientes límites.

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **Rpta:** 1

② $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n^4}$ **Rpta:** 1

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt[n]{n^n}}$ **Rpta:** 0

IX. Determinar si cada sucesión dada es creciente, decreciente ó no monótona.

① $\{\sqrt{n}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

② $\{\frac{n^2}{n+1}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

③ $\{(-1)^n\sqrt{n}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** no Monótona

④ $\{\frac{(n+1)^2}{n^2}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Decreciente

⑤ $\{\frac{n^n}{n!}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

⑥ $\{\frac{4^n}{\sqrt{4n^2+1}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

⑦ $\{\frac{5^n}{1+5^{2n}}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Decreciente

⑧ $\{\frac{n!}{3^n}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

⑨ $\{\frac{n^3-1}{n}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

(10) $\{\cos \pi n\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** No Monótona

(11) $\{\operatorname{sen} \pi n\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** No monótona

(12) $\{\frac{2^n}{n!}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Decreciente

(13) $\{\frac{4^n}{2^n+100}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Creciente

(14) $\{\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n.n!}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Decreciente

(15) $\{\frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Decreciente

(16) $\{\ln(\frac{n+1}{n})\}_{n\geq 1}$ **Rpta:** Decreciente

X.

(1) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, siendo $P_n = \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[9]{a^4}.\sqrt[27]{a^8}...\sqrt[3^n]{a^{2n}}$ **Rpta:** a

(2) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \cosh\frac{\alpha}{2}.\cosh\frac{\alpha}{2^2}.\cosh\frac{\alpha}{2^3}...\cosh\frac{\alpha}{2^n}$ **Rpta:** $\frac{\operatorname{senh}\alpha}{\alpha}$

(3) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^P}-\frac{P+1}{n}$ **Rpta:** $\frac{1}{2}$

(4) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2n})$ si $|x|<1$ **Rpta:** $\frac{1}{1-x}$

(5) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} n^t\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$ siendo $\lim\limits_{n\to\infty} n^t a_n = a$ **Rpta:** $a.e^t$

(6) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)^{n-p}}$ **Rpta:** e^{p+1}

(7) Sea m $\in$ R arbitrario, si la sucesión $\{S_n(m)\}_{n\geq 1}$, esta definido por $S_n(m)=1^m+2^m+...+n^m$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n(m+1)}{nS_n(m)}$

Rpta: Si m = 0, $S=\dfrac{1}{2}$, si m > 0, $S=\dfrac{1+m}{2+m}$, si m < 0, $S=\dfrac{1-m}{2-m}$

(8) Determinar el parámetro λ para que el limite cuando n → ∞ de la expresión. $A=\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+1)(k+2)}{\lambda n^2(n+1)}\right]^{un}$ sea finito y determina el valor de u para que valga e, se supone . finito. **Rpta:** $\lambda=\dfrac{1}{6}$ $\mu=\dfrac{1}{8}$

(9) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ siendo $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$. Sabiendo que $4a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}$, n > 4 **Rpta:** 3

(10) Determinar el número α de manera que: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{\alpha^3 n^m+n^2+1}+\sqrt[m]{(\alpha-2)n^m+n+1}$, sea finito (m impar m > 1) y calcular dicho limite para los distintos valores de m.

Rpta: $\alpha=1, \dfrac{1}{3}$ si m = 3 y si m = 5, 7

(11) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha+2^2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}+3^2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{3}+...+n^2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{n}}{n^2}$ **Rpta:** $\dfrac{\alpha}{2}$

(12) Probar que la sucesión $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}, \ldots$ converge a $\sqrt{3}$

(13) Hallar el límite de la sucesión. $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$, en la que cada término es media aritmética de las dos que preceden. **Rpta:** $\frac{a_1 + 2a_2}{3}$

(14) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(2 + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$ **Rpta:** $\frac{e}{2}$ (Sug. Stolz-Cesaro)

(15) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4} + \ldots + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n+1}\right)$ **Rpta:** 2.

(16) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$ **Rpta:** 1

(17) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}}}$, siendo positivo todos los términos de la sucesión a_n y sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = k$

Rpta: $\sqrt{k}$ (Sug. Stolz-Cesaro)

(18) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n^n}$ **Rpta:** 1 (Sug. Stolz-Cesaro)

(19) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^n}{\ln(n!)}$ **Rpta:** 1 (Sug. STIRLING)

(20) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n!)^2}$ **Rpta:** $\sqrt{\pi}$ (Sug. STIRLING)

(21) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{2}{n})^x(1+\frac{3}{n})^x....(1+\frac{n}{n})^x}$

Rpta: $(\frac{4}{e})^x$ (Sug. Fórmula de STIRLING)

(22) Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2.2.4.4...(2n)(2n)}{1.3.3.5.5....(2n-1)(2n-1)} = \frac{\pi}{2}$ (llamado la fórmula de WALLIS)

(23) Aplicando la fórmula de Wallis, calcular

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1.2.4.6...(2n)}{n.1..3.5...(2n-1)} = \sqrt{\pi}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1.2.4.6...(2n^2)}{n.1..3.5...(2n^2-1)} = \sqrt{\pi}$

(24) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(1+\text{tg}^2(a_n))}.\ln(\frac{2-a_n}{2-a_n-a_n^2})$ siendo $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión infinitésima y, tal que: $a_n \neq 0$, $\forall$ n **Rpta:** $\frac{1}{2}$

(25) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$ **Rpta:** $\frac{e}{2\sqrt{\pi}}$ (Sug. Stolz-Cesaro)

(26) Defínase una sucesión b_n, tal que: $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{b_0^2+10}{2b_0}, ..., b_{n+1} = \frac{b_n^2+10}{2b_n}$ estudiar la sucesión, en caso de convergencia calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(27) Demostrar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dado por $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$, n $\in Z^+$

(28) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales definida por $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\dots,a_n = \dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$ para n ≥ 3 probar que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{3}$

(29) Analizar la convergencia de la sucesión y en caso de converger, calcular el limite de $x_1 = \sqrt{\dfrac{x_0^2+ab^2}{a+1}},\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1^2+ab^2}{a+1}},\dots,\ x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2+ab^2}{a+1}}$ .tal que: x_0, a, b son reales fijos, a > 0 y $0 < x_0 < b$.

(30) Si $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, y $a_1 \neq b_1$ definimos $a_2 = \sqrt{a_1.b_1}$, $b_2 = \dfrac{1}{2}(a_1+b_1)$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$. Probar que:

a) $a_2 < b_2$ **b)** $a_n < b_n$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(31) Si la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ esta definido por: $u_1 = 1,\dots,u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

¿u_n es monótona y acotada? si lo es, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(32) Dada la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ definida por: $b_1 > 1$ y $b_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{b_n}$ para n ≥ 1, demostrar que $\{b_n\}_{n\geq 1}$, converge y luego calcular sus puntos de convergencia.

(33) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$, tal que: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_{2n}+a_{2n-1}\right)$, $a_{2n+2} = \dfrac{a_{2n}.a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$, demostrar que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge a 4.

(34) Estudiar la convergencia de las sucesiones

a) $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$

b) $\{b_n\}_{n\geq 1}$, $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_4 = \frac{5}{8}$,... $b_n = \frac{b_{n-1}+b_{n-2}}{2}$

(35) Calcular $\lim\limits_{n\to 1} \ln(\frac{1}{n}).\ln(1+\frac{1}{n})$ y diga si es convergente ó divergente.

(36) Demostrar que la sucesión $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}$,.... converge $\sqrt{3}$.

(37) Estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_n = \frac{((\frac{1}{n})^2+1)^{\frac{3}{2}}}{1}+\frac{((\frac{2}{n})^4+1)^{\frac{3}{2}}}{2}+...+\frac{((\frac{n}{n})^2+1)^{\frac{3}{2}}}{n}$$

(38) Sea $\{T_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $T_1 = 3$, $T_n + 1 = \frac{3(1+T_n)}{3+T_n}$ ¿ T_n es Monótona y acotada?, verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \sqrt{3}$.

(39) Dada la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ está definida por $u_1 = 1,...,u_n = \sqrt{5+4u_{n-1}}$ para n ≥ 2. Analizar si la sucesión es monótona y acotada, de ser afirmativo, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(40) Analizar si las siguientes sucesiones son monótonas y acotadas, si lo son, calcular el límite de cada una.

a) $\{ \int_0^n e^{-nx}dx\}_{n\geq 1}$.

b) $S_o = 1,\ S_{n+1} = \dfrac{S_n^2 + 10}{2S_n}$, n está en Z_o^+.

c) $u_1 = (\dfrac{u_0^2 + ab^2}{a+1})^{\frac{1}{2}},\ u_2 = (\dfrac{u_1^2 + ab^2}{a+1})^{\frac{1}{2}}, \ldots, u_{n+1} = (\dfrac{u_n^2 + ab^2}{a+1})^{\frac{1}{2}}$

donde u_0, a, b son reales fijos, tal que $0 < u_o < b,\ a > 0$.

d) $u_1 = 1,\ u_2 = 2, \ldots, u_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1}),\ n \geq 3$.

e) $S_1 = \dfrac{1}{1^p},\ S_2 = \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p}, \ldots, S_n = \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p},\ p > 1$.

(41) Si $T_o = 1,\ T_{n+1} = \dfrac{2T_n^3 + a}{3T_n^2}$, donde: $a > 0$ probar que:

a) $T_n > 0,\ n \in Z^+$

b) $T_1 \geq T_2 \geq T_3, \ldots \geq T_n > 0$.

c) $T_n^3 \geq a$, $n \in Z^+$

d) $\{T_n\}_{n \geq 1}$, converge.

e) $(\lim\limits_{n \to \infty} T_n)^3 = a$

f) $\lim\limits_{n \to \infty} T_n > 0$.

CAPÍTULO II

2. SERIES INFINITAS.-

2.1. DEFINICIÓN.-

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales, entonces a la expresión: $a_1+a_2+...+a_n+...$ se denomina serie infinita de números reales.

A una serie infinita: $a_1+a_2+...+a_n+...$,representaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+...+a_n+...$$

Donde $a_1, a_2,...,a_n,...$, se denomina (o llaman) términos de la serie y a_n es llamado el n-ésimo término de la serie.

Ejemplos.-

① La serie infinita: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}+...$, es representada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}+...$$

② La serie infinita: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...$, es representada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

(3) La serie infinita: $1 + \frac{1.3}{1.4} + \frac{1.3.5}{1.4.7} + \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10} + \ldots$, cuyo n–ésimo términos es:

$a_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.4.7.10\ldots(3n-2)}$ es representado por: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.4.7.10\ldots(3n-2)}$

(4) La serie infinita: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots$, cuyo n–ésimo término es:

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, se representa por: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

OBSERVACIÓN.- De la serie infinita de numeros reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ formaremos una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ definida de la siguiente forma:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.
.
.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

.
.
.

A la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, se denomina sucesión de sumas parciales de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo S_n la n-ésima suma parcial de la serie.

2.2. DEFINICIÓN.-

Consideremos una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y una sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$.

Si el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe, entonces diremos que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y converge a S.

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es convergente, se puede escribir así:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$, al cual llamaremos suma de la serie infinita.

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, carece de suma.

OBSERVACIÓN.- Si $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ existe, entonces la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es convergente, esto es:

Una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

Ejemplo.- Hallar la suma de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, en caso de ser convergente.

Solución

El términos n-ésimo de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (descomponiendo a a_n en fracciones parciales), es decir:

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$, efectuando operaciones se tiene: A = 1, B = -1

Luego: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ existe, entonces: la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

OBSERVACIÓN.- Otra manera de hallar la n–ésima suma parcial de una serie infinita, es usando la regla telescópica, es decir:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)}$$

Como $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, entonces:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{m} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = -\sum_{i=1}^{m} (\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}) = -(f(n) - f(0)),\ \text{donde}$$

$$f(i) = \frac{1}{i+1} \Rightarrow s_n = -(\frac{1}{n+1} - 1) = 1 - \frac{1}{n+1},\ \text{es decir:}$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 1 \ \text{existe, entonces:}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1.

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

OBSERVACIÓN.-

1° A veces necesitamos que la serie infinita comience en el término a_0 o en el a_2 ó en algún otro término, si $k > 0$ es entero, escribiremos:

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + \ldots}$$

- En caso de que carezca de importancia, al índice que se le asigne al primer término, se acostumbra con frecuencia escribir $\sum a_n$ para designar una serie infinita.

2° Puesto que $\lim_{n\to\infty}(s_n - c)$, c constante existe $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, se deduce que podemos omitir un número finito de términos (entre los primero) de una serie infinita, sin que se afecta la convergencia o divergencia de la serie, por supuesto el valor de la suma si existe, quedara afectado.

2.3. PROPIEDADES.-

(1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$ converge, esto es: $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s$, $(\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s)$ pero

$$a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0 \text{ ; luego: } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2) Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración

Suponiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (por la propiedad 1), pero esto contradice a la hipótesis. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

NOTA.- Esta propiedad es muy importante, pues permite, en algunos casos determinar en forma inmediata la divergencia de una serie.

Ejemplo.- La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^3+2}$ es divergente puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+2} = 1 \neq 0$$

(3) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes con sumas s_1 y s_2 respectivamente y $c \in R$. Entonces:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge a c s_1 , es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge a $s_1 + s_2$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ converge a $s_1 - s_2$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Demostración

Demostraremos **ii.** puesto que **i.** , **iii.** serán similares.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) + ...$$

La n-ésima suma parcial de esta serie es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

$= s_n + t_n$, donde: s_n y t_n son las n-ésima sumas parciales de:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ respectivamente, luego

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s_1 + s_2$, es decir:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=s_1+s_2$ existe, entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=s_1+s_2$.

(4) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente y $c\in R$, entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c.a_n$ es divergente .

Demostración

Ejercicio para el lector.

(5) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ es divergente, entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ es divergente.

Demostración

Suponiendo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ es convergente.

Luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(a_n+b_n)-a_n]$ seria convergente por **3iii.**, pero es una contradicción con la hipótesis por tanto: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ es divergente.

2.4 TEOREMA.-

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de sumas parciales para una serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, entonces: para cualquier $\varepsilon>0,\ \exists\ N>0/|s_R-s_T|<\varepsilon$ siempre que R > N, T >N.

Demostración

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sea s su suma, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N > 0 / n > N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon .$$

En particular podemos considerar: $|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, por tanto, si R>N y T>N.

$$|s_R - s_T| = |s_R - s + s - s_T| \le |s_R - s| + |s - s_T|$$

$$|s_R - s_T| \le |s_R - s| + |s_T - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / R, T > N \Rightarrow |s_R - s_T| < \varepsilon$$

2.5 SERIES ESPECIALES.-

a) SERIE ARMÓNICA.- La serie armónica es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

La serie armónica es divergente: En efecto $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$

$s_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$, entonces:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Para n > 1 $\Rightarrow$ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

(pues hay n-términos en cada lado de la desigualdad)

Luego $s_{2n}-s_n>\frac{1}{2}$ ... (α) siempre que n > 1, pero por el teorema 2.4., establece que si la serie es convergente $s_{2n}-s_n$ se puede hacer tan pequeño tomando n suficientemente grande, esto es:

Si $\varepsilon=\frac{1}{2},\exists N>0/|s_{2n}-s_n|<\frac{1}{2}$ siempre que 2n > N, n > N, pero esto contradice a (α), por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

b) SERIE GEOMÉTRICA.- Una serie geométrica es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}+...$$

La serie geométrica es convergente cuando r < 1 y es divergente cuando r ≥ 1.

En efecto: La n-ésima suma parcial de ésta serie, está dado por:

$s_n=a(1+r+r^2+...+r^{n-1})$, además se tiene:

$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+...+r^{n-1})$

Luego $s_n=a(1+r+r^2+...+r^{n-1})=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, r ≠ 1. Entonces:

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a(\frac{1-r^n}{1-r}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$, donde: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$, existe y es cero si $|r|<1$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$, si $|r|<1$, entonces: La serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, converge cuando $|r|<1$, y su suma es $\frac{a}{1-r}$,

es decir: $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r},\ |r|<1$$

Si $|r|\geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$ no existe, por tanto la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^n$ es divergente, cuando $|r|\geq 1$.

Ejemplos:

① La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n} = \frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$ es una serie geométrica con $r=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow$ la serie converge y su suma es: $s = \dfrac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$.

② La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$, se puede escribir $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^n$,

de donde: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n = 1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\ldots$, es una serie geométrica convergente, pues $r=\frac{2}{5}<1$ y su suma es: $s=\dfrac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3} \Rightarrow s=\frac{5}{3}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^n = 1+\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+...$, es una serie geométrica convergente, pues

$r=\frac{3}{5}<1$ y su suma es: $s=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2} \Rightarrow s=\frac{5}{2}$, por tanto:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^n=\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$, es decir que la serie

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$, converge a $\frac{25}{6}$.

③ La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}$, diverge. En efecto: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{3})^n=1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+...$, es una serie geométrica donde: $r=\frac{4}{3}>1$, luego $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}$, es divergente.

④ La serie $0.3+0.03+0.003+...+\frac{3}{10^n}+...$ es una serie convergente.

En efecto: La serie $0.3+0.03+0.003+...+\frac{3}{10^n}+...$, se puede escribir como

$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}...+\frac{3}{10^n}+...$, donde: $r=\frac{3}{10}<1$, por lo tanto la serie es convergente y su suma es: $s=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{1}{3} \Rightarrow s=\frac{1}{3}$

c) **LA SERIE – P.-** La serie - p, tiene la forma:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}=\frac{1}{1^P}+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+...+\frac{1}{n^P}+...}$$ siendo p una constante.

Cuando $p > 1$, la serie-p, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, es convergente.

Cuando $p < 1$, la serie-p, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ es divergente.

Para el caso cuando $p = 1$, se tiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que es divergente.

Ejemplos.- Determinar la convergencia ó divergencia de las series.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n.n!}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n.n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n.(n-1)!n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$, es una serie-p, donde: $p = 2 > 1$, que es convergente.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n-1)!}{n!}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n-1)!}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n-1)!}{n(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$, es una serie-p, donde: $p = \frac{1}{2} < 1$, que es divergente.

2.6. SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS.-

La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde: $a_n \geq 0$, para todo n = 1,2,..., se llama serie infinita de términos positivos.

En este caso, la sucesión de la sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, es creciente, ó sea: $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < s_{n+1} < \ldots$

2.7. TEOREMAS.-

2.7.1. TEOREMA (CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA).-

Consideremos la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, entonces:

i) Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, es una serie de términos positivos y es convergente y además $a_n \leq b_n$, $\forall$ n > N $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es convergente.

ii) Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, es una serie de términos positivos y es divergente y además $a_n \geq b_n$, $\forall$ n > N $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es divergente.

Demostración

i) Se tiene que $a_n \geq b_n$, $\forall$ n > N. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces: $\forall$ n > N; tenemos:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_n \quad , \quad \text{entonces:}$$

$s_n \le \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_n \le \sum_{k=1}^{N} a_k + b$, entonces: $s_n \le \sum_{k=1}^{N} a_k + b$, es decir la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\ge 1}$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es acotada superiormente y como es una sucesión creciente, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) Suponiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces por **i.**, tendremos que: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la cual contradice a la hipótesis; por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos.-

1) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

Solución

n ≥ 1, se tiene: $1+n^2 \le n+n^2$, $1+n^2 \le n(1+n)$, $\frac{1}{n} \le \frac{1+n}{1+n^2}$,

luego $\frac{1+n}{1+n^2} \ge \frac{1}{n}$, ∀ n ≥ 1 y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica) por lo tanto por el teorema **2.7.1 ii.** concluimos que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ es divergente.

(2) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$

Solución

$\forall$ n $\geq$ 1, se tiene $n2^n \geq 2^n \Rightarrow \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$.

Luego por la parte **(i)** del teorema **(2.7.1)**, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ es convergente.

(3) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^3}$

Solución

$\forall$ n $\in Z^+$, se cumple $-1 \leq \operatorname{sen}^3(n+1) \leq 1$, sumando 2, $1 \leq 2 + \operatorname{sen}^3(n+1) \leq 3$

luego $0 \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^3} \leq \frac{3}{2^n + n^3} \leq \frac{3}{2^n}$, es decir:

$0 \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^3} \leq \frac{3}{2^n}$ como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ es una serie geométrica convergente $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$ concluimos por la parte **2.7.1(i)** que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^3}$ es convergente.

2.7.2. TEOREMA (CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE).-

Consideremos las series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos. Entonces:

i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0 \Rightarrow$ ambas series convergen ó divergen.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es divergente.

Ejemplos.-

(1) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es convergente ó divergente.

<u>**Solución**</u>

Sea $a_n = \frac{1}{n^n}$, tomemos $b_n = \frac{1}{2^n}$, es decir:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$.

Entonces : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 0$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente.

por lo tanto por la parte **(ii)** del teorema **2.7.2** concluimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, es convergente.

(2) Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{n^2}{4n^3+1}$, tomemos $b_n = \frac{1}{n}$ es decir: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ una serie divergente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{4n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4n^3+1} = \frac{1}{4} > 0,\text{ luego } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente, por lo tanto por la parte **(i)** del teorema **2.7.2** concluimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$, es divergente.

(3) Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$ converge ó diverge.

Solución

Como $a_n = \text{sen}(\frac{1}{n})$, tomemos $b_n = \frac{1}{n}$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ una serie divergente,

entonces: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}(\frac{1}{n}) = 1 > 0$.

Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente por lo tanto por la parte **(i)** del teorema **2.7.2** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\frac{1}{n})$, es divergente.

2.7.3. TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN Ó CRITERIO DE DÁLEMBERT).-

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita con $a_n \geq 0$, $\forall$ n (de términos positivos) y convengamos que: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = k$, entonces:

i) Si k < 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) Si k > 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente ó cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = +\infty$

iii) Si k = 1, no se puede determinar nada.

Ejemplos:

① Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = n2^{-n} = \frac{n}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, calculando el límite se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

Luego por la parte i) del teorema 2.7.2 se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$, es convergente.

② Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$ es convergente o divergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^3+1}}{e^{n+1}}$, entonces:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sqrt{\frac{(n+1)^3+1}{n^3+1}} = \frac{1}{e} < 1$$

Luego por la parte i) del teorema (2.7.3) concluimos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$ es convergente.

(3) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ es convergente o divergente.

Solución

Sea $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

$k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}=1$. Luego por la parte iii) del teorema (2.7.3) no se concluye nada. Ahora aplicaremos el criterio de comparación por límites como $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, tomamos $b_n=\frac{1}{n}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es una serie divergente, entonces $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}=1>0$. Luego por la parte i) del teorema (2.7.2) se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ es divergente.

2.7.4. TEOREMA (CRITERIO DE LA INTEGRAL).-

Sea f una función definida y positivos para todo $x>1$ y además decreciente y que $f(n)=a_n$, $\forall\ n\in Z^+$. Entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente, si y solo si, la integral impropia $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ es convergente y si la integral impropia $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente.

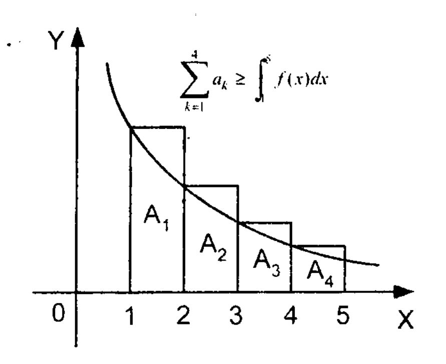
Demostración

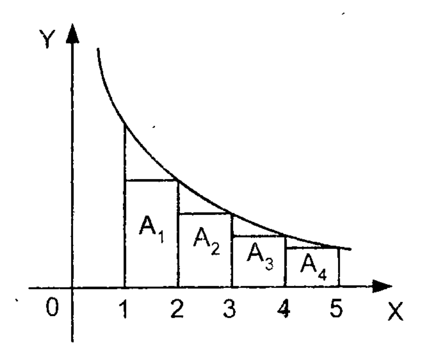
Sea $k \in Z^+$, por el teorema del valor medio para las integrales $\exists \in / \int_k^{k+1} f(x)dx = 1$, f(ε) donde: k < ε < k + 1, como f es decreciente se tiene: $a_k = f(k) \geq f(\varepsilon) \geq f(k+1) = a_{k+1}$, entonces $a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq a_{k+1}$

Luego $\forall\ n \in Z^+$ $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$, de donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_1$$

Ahora veremos para el caso en que n = 4





Luego por el criterio de comparación las expresiones

$\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\int_1^{\infty} f(x)dx$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$, son convergentes o divergentes simultáneamente.

Ejemplos.-

(1) Demostrar que la serie – p, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, es convergente si p > 1 y es divergente si p ≤ 1

Demostración

Como $a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}$, entonces:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Big/_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -[\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} - \frac{1}{p-1}] = \frac{1}{p-1}, \text{ si } p > 1$$

Entonces la serie – p, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ es convergente, si p > 1; y es divergente para p ≤ 1, para el caso en que p = 1, se obtiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que es divergente.

(2) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$, es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n = ne^{-n} = f(n) \Rightarrow f(x) = xe^{-x}$, además $f(x) \geq 0$ para $x > 1$ y f es decreciente en $[1,+\infty>$

Luego $\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(xe^{-x}-e^{-x})\Big/_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty}[(be^{-b}-e^{-b}) - 2e^{-1}] = 2e^{-1}$$

Por tanto $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx$ es convergente. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ es convergente.

③ Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n = \frac{1}{n\ln(n)} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0$ para x > 2, además

$f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} < 0$ para x > 2 Luego f es decreciente en [2,+∞>, por tanto: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big/_2^b = \lim_{b\to+\infty}\ln(\frac{\ln(b)}{2}) = \infty$

Entonces se tiene que $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ es divergente. Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$, es divergente.

2.7.5. TEOREMA (CRITERIO DE LA RAIZ O CRITERIO DE CAUCHY).-

Si en la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de términos positivos, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$, entonces:

i)	Si $k < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
ii)	Si $k > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente
iii)	Si $k = 1$, no se puede determinar nada.

Ejemplos.-

(1) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$ es convergente o divergente.

<u>**Solución**</u>

Como $a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^n$ y de acuerdo al criterio de la raíz se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n+1}{2n-1})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$$

Luego la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$, es convergente de acuerdo a la parte i) del teorema 2.11.

(2) Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$

<u>**Solución**</u>

Como $a_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$ y de acuerdo al criterio de la raíz se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n^{\frac{1}{n}}-1)^n} = \lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{n}}-1) = 1-1 = 0 < 1$$

Luego por la parte i) del teorema **2.7.5** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}}-1)^n$, es convergente.

(3) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n = \frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$ y de acuerdo al criterio de la raíz se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} \frac{\sqrt{2}+2}{3} = \frac{\sqrt{2}+2}{3} > 1$$

Luego por la parte ii) del teorema (2.7.5) se concluye que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$ es divergente.

Observación.- El criterio de comparación, es un criterio de convergencia para series con términos positivos, sin embargo se puede usar para probar la convergencia de otras series.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es una serie cualquiera de números reales, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, es una serie de términos positivos y por tanto el criterio de comparación puede aplicarse a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2.8. SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS.-

Una serie infinita de la forma siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

donde: $a_n > 0$, $\forall n \in Z^+$, se denomina serie alternada.

También las series de la forma: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$,

donde: $a_n > 0$, son series alternadas.

2.8.1. TEOREMA (CRITERIO DE LEIBNIZ).-

La serie alternada de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

Es convergente si se cumple:

i) $0 < a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n $\in Z^+$, **ii)** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplos: Determinar si la serie alternada dada es convergente ó divergente.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$$

Solución

Como $a_n = \frac{1}{\ln(n)} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)}$, además $\forall$ n $\in Z^+$, n < n + 1 $\Rightarrow$

ln (n) < ln (n+ 1) $\Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)}$, para n $\geq$ 2 es decir: $a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n $\geq$ 2

y además: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$.

Luego por el criterio de Leibniz, la serie alternada: $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$, es convergente.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$

Solución

Como $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$, entonces: $\forall$ n $\in Z^+$, $2^n < 2^{n+1}$, de donde:

$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$, $\forall$ n $\geq$ 1, es decir: $a_{n+1} < a_n$, además $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Luego por el criterio de Leibniz, la serie alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$, es convergente.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{n}{3n-1} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n+2}$, $\forall$ n $\in Z^+$, 2n -1 < 2n , sumando $3n^2$

$3n^2 + 2n - 1 < 3n^2 + 2n$, (n + 1)(3n - 1) < n(3n + 2)

$\dfrac{n+1}{3n+2} < \dfrac{n}{3n-1}$ es decir: $a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n $\in Z^+$, además:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Luego de acuerdo al criterio de Leibniz, la serie alternada: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{3n-1}$ es divergente.

NOTACIÓN.- A la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, abreviaremos escribiendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{, donde: } \quad u_n = (-1)^{n+1} a_n \ \wedge \ |u_n| = a_n$$

2.8.2. TEOREMA.-

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente, entonces la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente.

Demostración

Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente (por hipótesis).

Luego por la propiedad de valor absoluto se tiene: $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$, es decir:

$0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$, de donde: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$, es una serie de términos positivos.

Luego $u_n + |u_n| \le 2|u_n|$, $\forall$ n > N y además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ es convergente, entonces: por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$, es convergente pero $\sum_{n=1}^{n} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}((u_n + |u_n|) - |u_n|)$, es convergente (suma de series de convergentes).

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, es convergente.

a) DEFINICIÓN.-

Se dice que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente.

b) DEFINICIÓN.-

Una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ que es convergente, pero no absolutamente convergente, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es condicionalmente convergente.

OBSERVACIÓN.- El teorema **2.8.2.** establece que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Sin embargo una serie convergente puede no ser absolutamente convergente.

Sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge } \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ converge.}$$

Ejemplos:

① La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, es una serie convergente, sin embargo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, no es convergente.

② La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2^n}$, es absolutamente convergente, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{3}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$, es una serie geométrica con razón $r = \frac{1}{2} < 1$. Luego la serie es convergente y por lo tanto: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2^n}$ es convergente.

OBSERVACIÓN.- Para determinar la convergencia o la divergencia de las series alternadas, se usa el criterio de la razón.

2.8.3. TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN PARA SERIES ALTERNANTES).-

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ una serie alternante, tal que $u_n \neq 0$, ∀n. Entonces:

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto es convergente.

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k > 1$ ó $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$, entonces: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, es divergente.

iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, no se puede determinar nada, acerca de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Demostración

i) Sea r un número, tal que: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < r < 1$, es decir k < r < 1, entonces como: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k$, existe un número N > 0, suficientemente grande, tal que: $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < r$, ∀n > N, se tendrá que: $|u_{N+1}| < r|u_N|$; $|u_{N+2}| < r|u_{N+1}|$; $|u_{N+3}| < r|u_{N+2}|$, etc., o lo que es lo mismo:

$$|u_{N+1}| < r|u_N|$$

$$|u_{N+2}| < r|u_{N+1}| < r^2|u_N|$$

$$|u_{N+3}| < r|u_{N+2}| < r^3|u_N|$$

$$\vdots$$

$$|u_{N+P}| < r^P|u_N|,\ \forall\ p \in z^+$$

Luego la serie $\sum_{P=1}^{\infty} r^P|u_n|$ es convergente, pues r < 1 entonces: la serie $\sum_{P=1}^{\infty}|u_{N+P}|$, es convergente, y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente.

ii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$ ó $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces: existe un número N > 0, tal que: $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, siempre que n > N, es decir: $|u_{N+1}| > |u_N|$, siempre que n > N.

Luego $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión creciente de términos positivos $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Luego concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es divergente.

Ejemplos:

(1) Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$, es convergente ó divergente ó condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = (-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

$$k = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}3^{n+1}n!}{(-1)^n 3^n (n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

como k < 1, de acuerdo a la parte **(i)** del teorema **2.8.3** la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$, es absolutamente convergente y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$ es convergente.

② Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$, es convergente ó divergente ó condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = (-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}$.

Luego $k = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2} = +\infty$.

Por lo tanto de acuerdo a la parte **(ii)** del teorema **2.8.3** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$ es divergente.

2.8.4. TEOREMA (CRITERIO DE RAABE).-

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita de términos positivos, si $k = \lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$ entonces:

i) k > 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) k < 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii) k = 1, nada se puede afirmar de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ejemplos:

(1) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente ó divergente.

<u>**Solución**</u>

De la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, se tiene: $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ de donde: $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$,de acuerdo al teorema **2.8.4** se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}), \quad k = \lim_{n\to\infty} n(\frac{2n+1}{n^2+2n+2}) = 2 > 1 .$$

Luego de acuerdo a la parte **(i)** del teorema **2.8.4** e concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, es convergente.

(2) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

En la serie dada se tiene que:

$$a_n=\frac{n^2-1}{2n^2+1} \quad \text{de donde:} \quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)^2+1}=\frac{n^2+2n}{2n^2+4n+3}.$$

Aplicando el teorema **2.8.4** se tiene:

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{n^2+2n}{2n^2+4n+3}}{\frac{n^2-1}{2n^2+1}}\right)$$

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(n^2+2n)(2n^2+1)}{(n^2-1)(2n^2+4n+3)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-6n-3)}{(n^2-1)(2n^2+4n+3)}=0<1$$

Luego de acuerdo a la parte **(ii)** del teorema **2.8.4** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}$, es divergente.

(3) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{(2n+1)(2n-1)}$ es convergente ó divergente.

Solución

En la serie dada se tiene que:

$$a_n = \frac{a}{(2n+1)(2n-1)} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a}{(2n+3)(2n+1)}$$

Luego por el criterio del teorema **2.8.4** se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n+3)(2n+1)}\right)$$

$$k = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{8n+4}{4n^2+3n+3}\right) = 2 > 1$$

Luego de acuerdo a la parte **(ii)** del teorema **2.8.4** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(2n+1)(2n-1)}$, es convergente.

(4) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n^2+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n = \frac{n-1}{2n^2+1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)^2+1}$

luego por el criterio del teorema **2.8.4** se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n^3+n}{2n^3+2n^2-n-3}\right) = 1.$$

Luego de acuerdo a la parte **(iii)** del teorema **2.8.4**, no se concluye nada y por lo tanto la convergencia se determina por uno de los criterios determinados.

OBSERVACIÓN.- Como en muchos casos, las series son decrecientes, entonces: aquí se puede utilizar el siguiente teorema de Cauchy.

2.8.5. TEOREMA.-

Si $a_{n+1} \leq a_n$, entonces: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si y solo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente.

Ejemplos.-

① Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Solución

Como $a_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es convergente o divergente si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente o divergente, pero $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, esta serie es divergente.

② Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, es convergente o divergente.

Solución

$$a_n = \frac{1}{n\ln(n)} \Rightarrow a_{2^n} = \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{2^n n \ln 2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n . \frac{1}{2^n n \ln 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$$

De acuerdo al ejemplo anterior es divergente por lo tanto por el teorema **2.8.5**, se concluye que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$, es divergente.

2.9. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ en caso de ser convergente.

Solución

El termino n-esimo de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ es $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$

ahora descomponemos a_n en fracciones parciales es decir:

$a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}$, de donde efectuando operaciones se tiene:

1 = (A + B)n + 3A (por igualdad).

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{matrix} \quad \text{Luego} \quad a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4})$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$$

$$a_4 = \frac{1}{3}(\frac{1}{4} - \frac{1}{7})$$

$$a_5 = \frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{8})$$

.
.
.

$$a_{n-4} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n-4} + \frac{1}{n-1})$$

$$a_{n-3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n})$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1})$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2})$$

$$a_n = \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$$

Sumando

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{3}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3})]$$

$$s_n = \frac{1}{3}[\frac{11}{6} - \frac{3n^2 + 12n + 11}{(n+1)(n+2)(n+3)}]$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{11}{18}$ entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, es convergente y su suma es igual a $\frac{11}{18}$, es decir: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{11}{18}$

(2) La siguiente serie es convergente, calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{2n+1}{n^2+n}) sen(\frac{1}{n^2+n})$$

Solución

Aplicando la identidad siguiente: $senA.\cos B = \frac{1}{2}[sen(A+B) + sen(A-B)]$

$$\cos(\frac{2n+1}{n^2+n}) sen(\frac{1}{n^2+n}) = \frac{1}{2}[sen(\frac{2n+2}{n^2+n}) + sen(\frac{1}{n^2+n} - \frac{2n+1}{n^2+n})]$$

$$= \frac{1}{2}[sen(\frac{2n+1}{n(n+1)}) + sen(\frac{-2n}{n(n+1)})] = \frac{1}{2}[sen(\frac{2}{n}) - sen(\frac{2}{n+1})]$$

$$a_n = \cos(\frac{2n+1}{n^2+n}) sen(\frac{1}{n^2+n}) = \frac{1}{2}[sen(\frac{2n}{n}) - sen(\frac{2}{n+1})]$$

Como $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, entonces:

$$s_n = \frac{1}{2}[(sen2 - sen1) + (sen1 - sen\frac{2}{3}) + (sen\frac{2}{3} - sen\frac{2}{4}) + ...$$

$$+ (sen\frac{2}{n-1} - sen\frac{2}{n}) + (sen\frac{2}{n} - sen\frac{2}{n+1})]$$

$$s_n = \frac{1}{2}(sen2 - sen\frac{2}{n+1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{sen2}{2}$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{2n+1}{n^2+n})sen(\frac{1}{n^2+n})=\frac{sen\,2}{2}$

(3) La siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, es convergente. Calcula su suma.

Solución

Como $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, expresaremos en una suma de fracciones en la forma: $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+5}$, de donde al efectuar operaciones se tiene:

$1=(2A+2B)n+5A-B$ (por identidad) $\begin{cases}2A+2B=0\\5A-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{6}\\B=-\frac{1}{6}\end{cases}$

$$a_n=\frac{1}{6}[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}]$$

$$a_1=\frac{1}{6}[1-\frac{1}{7}]$$

$$a_2=\frac{1}{6}[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}]$$

$$a_3=\frac{1}{6}[\frac{1}{5}-\frac{1}{11}]$$

$$a_4=\frac{1}{6}[\frac{1}{7}-\frac{1}{13}]$$

.
.
.

$$a_{n-4} = \frac{1}{6}[\frac{1}{2n-9} - \frac{1}{2n-3}]$$

$$a_{n-3} = \frac{1}{6}[\frac{1}{2n-7} - \frac{1}{2n-1}]$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{6}[\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n+1}]$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{6}[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}]$$

$$a_n = \frac{1}{6}[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5}]$$

Sumando

$$s_n = \frac{1}{6}[(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) - (\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5})]$$

$$s_n = \frac{23}{90} - \frac{12n^2+36n+23}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{23}{90} \quad \text{entonces} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{23}{90}$$

(4) Hallar la suma de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} arctg(\frac{1}{1+n(n+1)})$

Solución

Al término n-ésimo de esta serie expresaremos en la forma:

$$a_n = arctg(\frac{1}{1+n(n+1)}) = arctg(\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}}), \text{ donde } tg\alpha = \frac{1}{n}; \quad tg\beta = \frac{1}{n+1}$$

Luego se tiene: $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\alpha.tg\beta}=\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n(n+1)}}=\dfrac{1}{1+n(n+1)}$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{1}{1+n(n+1)}\ \Rightarrow\ \alpha-\beta=arctg(\frac{1}{1+n(n+1)})$$

De donde: $a_n=arctg(\dfrac{1}{1+n(n+1)})=\alpha-\beta=arctg(\dfrac{1}{n})-arctg(\dfrac{1}{n+1})$

Ahora calculamos la sucesión de las sumas parciales.

$$s_n=-\sum_{i=1}^{n}(arctg(\frac{1}{i+1})-arctg(\frac{1}{i}))=-(arctg(\frac{1}{n+1})-arctg(1))$$

(Esto es por la regla Telescópica)

$$s_n=arctg(1)-arctg(\frac{1}{n+1})=\frac{\pi}{4}-arctg(\frac{1}{n+1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}arctg(\frac{1}{1+n(n+1)})=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}arctg(\frac{1}{1+n(n+1)})=\frac{\pi}{4}$$

(5) Estudiar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-1)(n+15)}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{n}{(4n-1)(n+15)} \approx \dfrac{1}{n} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, serie divergente

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(4n-1)(n+15)} = \dfrac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ por la parte i) del teorema (2.7.2)

se tiene que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(4n-1)(n+15)}$ es divergente.

(6) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$; si converge hallar la suma.

Solución

Primeramente calcularemos la integral $\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$

Sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow$ dx = 2u du

$$\int e^{-\sqrt{x}} dx = \int e^{-u} 2u\, du = 2\int ue^{-u} du \quad \text{(integrando por partes)}$$

$$\int e^{-\sqrt{x}} dx = -2(ue^{-u} + e^{-u}) = 2(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$$

$$\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)\Big/_n^{n+1} = -2[e^{-\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+1) - e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx = -2\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+1) - e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)]$$

Ahora calculamos la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, la sucesión de las sumas parciales mediante la regla Telescópica.

$$s_n = -2\sum_{i=1}^{n}(f(i) - f(i-1)) = -2(f(n) - f(0))\text{, donde:}$$

$$f(i) = e^{-\sqrt{i+1}}(\sqrt{i+1}+1) \Rightarrow f(i-1) = e^{-\sqrt{i}}(\sqrt{i}+1)$$

$$s_n = -2\sum_{i=1}^{n}[e^{-\sqrt{i+1}}(\sqrt{i+1}+1) - e^{-\sqrt{i}}(\sqrt{i}+1)] - 2[e^{-\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+1) - e^{-1}2]$$

De donde: $s_n = 4e^{-1} - \dfrac{2(\sqrt{n+1}+1)}{e^{\sqrt{n+1}}}$,

como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 4e^{-1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$, es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx = 4e^{-1}$$

(7) Analizar la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{n.n^{\frac{1}{n}}} \approx \dfrac{1}{n} = b_n$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ es una serie divergente (serie armónica), $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1 > 0$, y de acuerdo a la parte i) del teorema 2.7.2. resulta que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, es divergente.

(8) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(1+\frac{1}{n})}$

Solución

Como $a_n = \frac{1}{n^2 \log(1+\frac{1}{n})} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall$ n ≥ 1 y además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7.1** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(1+\frac{1}{n})}$ es convergente.

(9) Determinar que la convergencia ó divergencia de la serie infinita $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Solución

Se sabe que, $\forall$ n ≥ 2, se cumple Ln(n) < n de donde $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ y como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente entonces por la parte **(ii)** del teorema **2.7.1** se concluye que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$, es divergente.

(10) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^3}$

Solución

$\forall$ n ≥ 1, se cumple $\sqrt{n}+3 \leq 4\sqrt{n}$, ahora multiplicamos por $\frac{1}{n^3}$ se tiene:

$\frac{\sqrt{n}+3}{n^3} \leq \frac{4\sqrt{n}}{n^3} = \frac{4}{n^{5/3}}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{5/3}}$ es convergente, entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7** se concluye que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^3}$ es convergente.

(11) Determinar la convergencia o divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+sen^3(n+1)}{2^n+n^3}$

Solución

$\forall\ n \in Z^+$, se cumple $\quad -1 \leq sen^3(n+1) \leq 1$

$$1 \leq 2+sen^3(n+1) \leq 3$$

$$0 \leq \frac{2+sen^3(n+1)}{2^n+n^3} \leq \frac{3}{2^n+n^3} \leq \frac{3}{2^n}$$

Y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ es convergente (serie geométrica $r = \frac{1}{2} < 1$), entonces por la parte (i) del teorema **2.7.1** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+sen^3(n+1)}{2^n+n^3}$, es convergente.

(12) Analizar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{-n}+4^{-n})^2$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{-n}+4^{-n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (9^{-n}+16^{-n}+2.12^{-n})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{16}\right)^{n}+2\left(-\frac{1}{12}\right)^{n}$$

sus series geométricas son convergentes puesto que $|r| < 1$, por lo tanto; la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2$ es convergente, además su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2=\frac{-\frac{1}{9}}{1-(-\frac{1}{9})}+\frac{-\frac{1}{16}}{1-(-\frac{1}{16})}+\frac{-\frac{1}{12}}{1-(-\frac{1}{12})}$$

$$=-\frac{1}{10}-\frac{1}{17}-\frac{1}{13}=-\frac{691}{2210}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2=-\frac{691}{2210}$$

(13) Analizar la convergencia ó la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{6-3n}.5^{4-2n})$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{6-3n}.5^{4-2n})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^6.e^{-3n}.5^4.5^{-2n}$$

$$=625e^6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{-3}.5^{-2})^n=625e^6\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{25e^3}\right)^n$$

Se tiene una serie geométrica donde $r=\frac{1}{25e^3} < 1$, y por lo tanto; la serie es convergente donde su suma es dado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{6-3n}.5^{4-2n}\right)=625e^6\left(\frac{-\frac{1}{25e^3}}{1+\frac{1}{25e^3}}\right)=\frac{-625e^6}{25e^3+1}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{6-3n}.5^{4-2n})=-\frac{625e^6}{25e^3+1}$$

(14) Determinar la convergencia de: 0.535353...

Solución

Sea A = 0.535353... , se puede escribir:

$$A=0.53+0.0053+0.000053+\ldots=\frac{53}{100}+\frac{53}{100^2}+\frac{53}{100^3}+\ldots,$$

de donde $r=\frac{1}{100}<1$; por lo tanto la serie es convergente y su suma es:

$$S=\frac{53(\frac{1}{100})}{1-\frac{1}{100}}=\frac{53}{99}$$

(15) Determinar la convergencia de 0.012012012...

Solución

Sea A = 0.012012012... , se puede escribir:

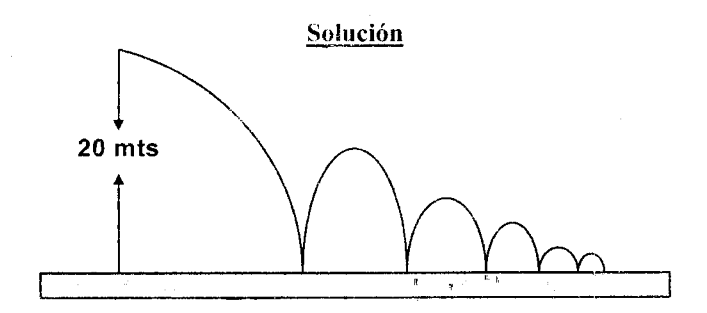
$$A=0.012+0.000012+0.000000012+\ldots=\frac{12}{1000}+\frac{12}{1000^2}+\frac{12}{1000^3}+\ldots$$

de donde $r=\frac{1}{1000}<1$; por lo tanto la serie es convergente y su suma es:

$$S=\frac{12(\frac{1}{1000})}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{12}{999}=\frac{4}{333} \qquad \therefore \quad S=\frac{4}{333}$$

(16) Se deja caer una pelota desde una altura de 20 mts. cada vez que toca el suelo rebota hasta $\frac{3}{4}$ de su altura máxima anterior. Encuentre la distancia total que viaja la pelota antes de llegar a reposo.

Solución



La distancia que recorre la pelota representaremos mediante la serie infinita.

$$20+2(\frac{3}{4})(20)+2(\frac{3}{4})^2(20)+...+2(\frac{3}{4})^n 20+...$$

La serie geométrica es convergente y su suma es:

$$20+40(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}})=20+40(3)=140 \text{ mts}$$

(17) Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+sen^2(n^3)}$

Solución

$\forall$ n $\geq$ 1, se cumple que: $0 \leq sen^2(n^2) \leq 1$, entonces

$2^n - 1 \leq 2^n - 1 + sen^2(n^3) \leq 2^n$, por lo tanto

$0 \leq 2^n - 1 + sen^2(n^3) \leq 2^n$, $\forall$ n $\geq$ 1, entonces:

$$0 \leq \frac{1}{2^n - 1 + sen^2(n^3)} \leq \frac{c}{2^n}, \ c > 1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2^n}$ es convergente, entonces por la parte (i) del teorema **(2.7.1)**

concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + sen^2(n^3)}$ es convergente.

(18) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1}$

Solución

Como $a_n = \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Como $\frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es convergente entonces por la parte **(i)** del

teorema **(2.7.1)**. Se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1}$ es convergente.

(19) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \approx \dfrac{1}{n^2}$, tomamos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, es decir: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es una serie geométrica.

Aplicando el teorema **(2.7.2)** se tiene: $k = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 > 0$, entonces , por la parte **(i)** del teorema **(2.7.2)** se concluye que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$ es convergente.

(20) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \approx \dfrac{1}{n}$, entonces tomo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que es una serie divergente entonces por la parte **(ii)** del teorema **2.7.2,** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2n+1}} = +\infty$, y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente se concluye que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ es una serie divergente.

(21) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{2^n}$.

Solución

Como $a_n = \dfrac{\ln(n)}{2^n}$, tomemos $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, es una serie convergente, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\ln(n)}{2^n} = 0 < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ es convergente entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7.2** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n)}{2^n}$ es convergente.

(22) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^2+2}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2+2}$, tomemos $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ es convergente.

Ahora aplicamos el teorema **2.7.2** es decir: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)}{n^2+2} = 0 < 1$ y como $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ es convergente se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^2+2}$ es convergente.

(23) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^{2n}}{(2n-1)!}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n = \dfrac{10^{2n}}{(2n-1)!} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{10^{2n+2}}{(2n+1)!}$

Ahora aplicando el criterio de la razón se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{2n+2}.(2n-1)!}{10^{2n}.(2n+1)!} = 100 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1$$, de donde por la

parte (i) del teorema **(2.7.3)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$ es convergente.

(24) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n = \frac{3^n n!}{n^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$; ahora aplicando el criterio de la razón

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}.(n+1)!.n^n}{3^n.n!.(n+1)^{n+1}} = 3 \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} [(1 + \frac{-1}{n+1})^{-(n+1)}]^{\frac{n}{-n(n+1)}} = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$$

Luego por la parte (ii) del teorema **(2.7.3)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ es divergente.

(25) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n = \dfrac{n!}{1.3.5...(2n-1)} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{1.3.5...(2n+1)}$, aplicando el criterio de la razón se tiene:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$, entonces por la parte (i) del teorema **(2.7.3)** se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$ es convergente.

(26) Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ es convergente o divergente.

Solución

Sea $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2} = f(n) \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln(x+1)} \Big/_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2}\right) = -(0 - \frac{1}{\ln 2}) = \frac{1}{\ln 2}$$

$\therefore \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \frac{1}{\ln 2}$, es convergente

Luego la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ es convergente.

(27) Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg(n)}{n^2+1}$ es convergente.

Solución

Sea $a_n = \dfrac{arctg(n)}{n^2+1} = f(n) \Rightarrow f(x) = \dfrac{arctg\, x}{x^2+1}$ entonces:

$$\int_1^{\infty} \frac{arctg\, x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{arctg\, x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{arctg\, x}{2} \Big/_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\frac{arctg^2(b)}{2} - \frac{arctg^2(1)}{2}) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$$

entonces la integral impropia es convergente, por lo tanto la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg(n)}{n^2+1}$ es convergente.

(28) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{[\ln(n)]^{\ln(n)}}$ es convergente.

Solución

Sea $a_n = \dfrac{1}{[\ln(n)]^{\ln(n)}} = f(n) \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{(\ln(x))^{\ln(x)}}$

entonces: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^y dy}{y^y}$, de donde:

$y = \ln x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$

ahora consideremos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^n}{n}$ es convergente, por el criterio de la razón

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, la serie convergente, luego por el criterio de la integral

$\int_2^{+\infty} \frac{e^y}{y^y} dy$, es convergente y como: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln 2}} = \int_2^{\infty} \frac{e^y}{y^y} dy$, se tiene que:

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}$ es convergente, por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n)]^{\ln(n)}}$ es convergente.

(29) Pruébese que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)})^p$, converge para p > 2 y diverge para p ≤ 2.

Solución

Aplicaremos el criterio de la razón:

Sea $a_n = (\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)})^p \Rightarrow a_{n+1} = (\frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6...(2n+2)})^p$

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n+1}{2n+2})^p = 1$, no hay información

Ahora aplicaremos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} n(1-(\frac{2n+1}{2n+2})^p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{2n+1}{2n+2})^p}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2p(\frac{n}{2n+2})^2(\frac{2n+1}{2n+2})^{p-1} = \frac{p}{2}$$

Y de acuerdo al criterio de Raabe se dice que:

Si $\frac{p}{2} > 1 \Rightarrow p > 2 \Rightarrow$ la serie converge, si p > 2

Si $\frac{p}{2} \leq 1 \Rightarrow p \leq 2 \Rightarrow$ la serie diverge, si p ≤ 2

(30) Verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1})$, converge.

Solución

Sea $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1}) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1}} \approx \dfrac{\sqrt{n}}{n^3} \approx \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$

Luego $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ es una serie convergente, ahora aplicamos el criterio de comparación por límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1})}{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}(\sqrt{n^6+2}+\sqrt{n^6+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^6}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = \frac{1}{2} > 0$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1})$ es convergente.

(31) Estudiar la serie $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\dfrac{1}{4\ln 4}+\dots$

Solución

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{4}{4\ln 4}+...=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

Sea $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, f continua $\forall$ x ≥ 2, aplicando el criterio de la integral

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big/_2^{+\infty}=\ln(\ln(+\infty))-\ln(\ln 2)=+\infty\text{, entonces}$$

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ es divergente, por lo tanto la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ es divergente.

(32) Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})sen[(\frac{n+1}{n})\pi]$

Solución

$$a_n=(\frac{1}{n})sen(\frac{n+1}{n})\pi=\frac{1}{n}sen(\pi+\frac{\pi}{n})=-\frac{1}{n}sen\frac{\pi}{n}$$

Para analizar la convergencia o divergencia de la serie usamos el criterio de comparación por límites, es decir:

Sea $b_n=-\frac{\pi}{n^2}$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}$ es convergente.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}sen(\frac{\pi}{n})}{-\frac{\pi}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}sen\frac{\pi}{n}=1>0$ y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, es convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})sen[(\frac{n+1}{n})\pi]$ es convergente.

(33) Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n$

Solución

Sea $a_n = n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n$, aplicando el criterio de la raíz tenemos.

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n}$$

$k = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 (\frac{5}{9} + \frac{(-2)^n}{9}) = \frac{5}{9} \pm \infty$ (oscila), entonces se tiene:

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n$ es divergente.

(34) Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$, y si converge calcular su suma.

Solución

Sea $a_n = \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} \approx \frac{1}{n^3} \Rightarrow$ sea $b_n = \frac{1}{n^3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)}{n^2(n+2)^2} = 1 > 0$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, es convergente entonces por la parte (i) del teorema (2.7.2) se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ es convergente.

Ahora hallamos su suma

$$a_n = \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} = \frac{4n+4}{4n^2(n+2)^2} = \frac{(n^2+4n+4)-n^2}{4n^2(n+2)^2}$$

$$a_n = \frac{1}{4}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}) = -\frac{1}{4}(\frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{n^2})$$

Calculamos la sucesión de las sumas parciales, para esto aplicamos la segunda regla telescópica.

$$s_n = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(i+2)^2} - \frac{1}{i}) = -\frac{1}{4}[f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0)] \text{, donde:}$$

$$f(i-1) = \frac{1}{(i+2)^2} \Rightarrow f(i) = \frac{1}{(i+1)^2}$$

$$f(n+1) = \frac{1}{(n+2)^2} \Rightarrow f(n) = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$s_n = -\frac{1}{4}[\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{4} - 1] = \frac{5}{16} - \frac{1}{4}(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2})$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{16} - \frac{1}{4}[\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}] = \frac{5}{16}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{16}$$

(35) Estudiar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n}$

Solución

Como $\sqrt{3}+(-1)^n=\sqrt{3}\mp 1 \Rightarrow \sqrt{3}+(-1)^n \le \sqrt{3}+1,\ \forall\ n\in Z^+$

$$\Rightarrow\ [\sqrt{3}+(-1)^n]^n \le (\sqrt{3}+1)^n \ \Rightarrow\ \frac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n} \le \frac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}$$

Es decir: $\dfrac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n} \le \dfrac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n},\ \forall\ n\in Z^+$

Ahora analizaremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}$, por el criterio de la raíz, es decir: $k=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{200}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$

Como $k=\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}<1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}$, es convergente, luego por el criterio de comparación la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n}$, es convergente.

(36) Determinar si la serie: $\dfrac{1}{2}+(\dfrac{2}{3})^2+(\dfrac{3}{8})^3+\ldots+(\dfrac{n}{3n-1})^{2n-1}+\ldots$ es convergente o divergente.

Solución

La serie dada se puede escribir en la forma:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n}{3n-1})^{2n-1}$ donde $a_n=(\dfrac{n}{3n-1})^{2n-1}$, ahora aplicamos el criterio de la raíz.

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{3n-1})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$$, entonces la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{3n-1})^n$ es convergente.

(37) Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n+2}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}[(n+1)\sqrt{n+2}+n\sqrt{n+1}]}$

Solución

Para calcular la suma de la serie, tratamos de simplificar el n-ésimo término de la serie, esto es:

$$a_n = \frac{3n^2+5n+2}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}[(n+1)\sqrt{n+2}+n\sqrt{n+1}]}$$

$$= \frac{(3n^2+5n+2)[(n+1)\sqrt{n+2}-n\sqrt{n+1}]}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}[(n+1)^2(n+2)-n^2(n+1)]}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+2)}{(n+1)(3n+2)}(\frac{1}{n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}) = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}})$$

Ahora calculamos la sucesión de las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i\sqrt{i+1}} - \frac{1}{(i+1)\sqrt{i+2}}) = -\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{(i+1)\sqrt{i+2}} - \frac{1}{i\sqrt{i+1}})$$

$$= -(f(n) - f(0)) = -(\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}[(n+1)\sqrt{n+2}+n\sqrt{n+1}]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(38) Estudiar la serie y en caso de convergencia calcular su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$

Solución

Primero analizaremos si la serie es convergente y para esto aplicaremos el criterio de comparación por límites.

Sea $a_n = \ln(1+\frac{1}{n(n+2)}) \approx \frac{1}{n(n+2)} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$, que es una serie convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})}{\frac{1}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} n(n+2)\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n(n+2)} = \ln e = 1 > 0$$

Y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$ es una serie convergente.

Ahora calculamos su suma:

$$a_n = \ln(1+\frac{1}{n(n+2)}) = \ln\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} = \ln(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})$$

$$a_n = \ln(n+1)^2 - \ln(n) - \ln(n(n+2))$$

$$a_n = 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$$

Ahora calculamos el término n-ésimo de la sucesión de las sumas parciales, es decir:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$a_1 = 2\ln 2 - \ln 1 - \ln 3$$

$$a_2 = 2\ln 3 - \ln 2 - \ln 4$$

$$a_3 = 2\ln 4 - \ln 3 - \ln 5$$

$$a_4 = 2\ln 5 - \ln 4 - \ln 6$$

$$a_5 = 2\ln 6 - \ln 5 - \ln 7$$

.

.

.

$$a_{n-3} = 2\ln(n-2) - \ln(n-3) - \ln(n-1)$$

$$a_{n-2} = 2\ln(n-1) - \ln(n-2) - \ln(n)$$

$$a_{n-1} = 2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1)$$

$$a_n = 2\ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2)$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2)$$

$$s_n = \ln 2 + \ln(\frac{n+1}{n+2}) \quad \text{de donde} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \ln 2$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)}) = \ln 2$$

(39) Estudiar la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{600}(2+(-1)^n)^n}{9^n}$

Solución

$\forall$ n $\in Z^+$, $2+(-1)^n \leq 3 \Rightarrow (2+(-1)^n)^n \leq 3^n$

$$\Rightarrow \frac{n^{600}(2+(-1)^n)^n}{9^n} \leq \frac{3^n.n^{600}}{9^n} = n^{600}(\frac{1}{3})^n$$

Ahora analizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{600}}{3^n}$, por el criterio de la raíz.

$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{600}}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{600} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{600}}{3^n}$ es convergente,

y por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{600}(2+(-1)^n)^n}{9^n}$, es también convergente.

(40) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{n(n+1)2^{n+1}}$ y si converge halle la suma.

Solución

A la serie dada expresaremos así $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{n(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Como n + 1 > n $\Rightarrow$ $n(n+1) > n^2$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, $\forall\ n \in Z^+$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, es convergente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente por ser serie geométrica con $r = \frac{1}{2} < 1$, como la suma e las series son convergentes, entonces la serie dada es convergente.

Ahora calculamos la suma de cada una de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$$

Sea $s_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}) = -(f(n) - f(0)) = -(\frac{1}{n+1} - 1)$

$s_n = 1 + -\frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$

Además sabemos que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2}) = 1$.

(41) ¿Para qué valores de "s" converge y para cuales diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...(2n)}]^s$?, justificando con los criterios ya conocidos.

Solución

Para determinar los valores de s para la convergencia o divergencia, aplicaremos el criterio de la razón.

$$a_n = [\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...(2n)}]^s \Rightarrow a_{n+1} = [\frac{1.3.5.7...(2n+1)}{2.4.6.8...(2n+2)}]^s$$

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[\frac{1.3.5.7...(2n+1)}{2.4.6.8...(2n)}]^s}{[\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...(2n)}]^s} = \lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n+2})^s = 1^s = 1 \Rightarrow k = 1,$$

entonces no podemos afirmar nada, en este caso aplicamos el criterio de RAABE, para lo cual hacemos.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow (\frac{2n+1}{2n+2})^s = \frac{1}{\alpha+1}, \text{ entonces:}$$

$$\alpha(2n+1)^s + (2n+1)^s = (2n+2)^s \Rightarrow \alpha = (\frac{2n+2}{2n+1})^s - 1$$

$$n\alpha = n(1+\frac{1}{2n+1})^s - n$$

$$n\alpha = n[1+s(\frac{1}{2n+1})+\frac{s(s-1)}{2!}(\frac{1}{(2n+1)^2})+...+\frac{1}{(2n+1)^s}]-n$$

$$n\alpha = n+s\frac{n}{2n+1}+\frac{s(s-1)}{2!}.\frac{n}{(2n+1)^2}+...+\frac{n}{(2n+1)^s}-n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(n\alpha)=\frac{s}{2}$, la serie converge si $\frac{s}{2}>1 \Rightarrow s>2$ y diverge $\frac{s}{2}\le 1 \Rightarrow s\le 2$, por lo tanto la serie dada converge, si s > 2 y diverge, si s ≤ 2.

(42) Analizar la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k}$, donde "k" es una constante.

Solución

Hacemos $\log n = u \Rightarrow 10^u = n \Rightarrow 10^{u/k} = n^{1/k}$.

Si $k>0 \Rightarrow \frac{u}{k}=\log n^{1/k} \Rightarrow u = k\log n^{1/k}$.

Sabemos que: $\log n < n, \forall n\ge 2 \Rightarrow \log n^{\frac{1}{k}} < n^{\frac{1}{k}} \Rightarrow k\log n^{\frac{1}{k}} < kn^{\frac{1}{k}} \Rightarrow u < kn^{\frac{1}{k}}$

$\log(n) < kn^{\frac{1}{k}} \Rightarrow u < kn^{\frac{1}{k}} < kn^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \log(n) < kn^{\frac{1}{k}} \Rightarrow (\log n)^k < k^k n$

$\Rightarrow \frac{1}{k^k n} < \frac{1}{(\log n)^k}$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, entonces:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^k n}$, diverge ∀ k > 0. $\therefore \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k}$, es divergente ∀ k > 0.

(43) Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}$, luego

$k = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1$ es decir k < 1 y de acuerdo a la parte **(i)** del criterio de la razón para series alternadas se concluye que la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}$, es absolutamente convergente y por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ es convergente.

(44) Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^n}{n}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = \dfrac{(-1)^n e^n}{n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}e^{n+1}}{n+1}$, luego

$k = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\,e^{n+1}}{(n+1)e^n} = e > 1$, de acuerdo a la parte a **(ii)** del criterio de la razón, se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ es divergente.

(45) Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Aplicando el teorema **2.8.2** se tiene:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$, de donde: por el criterio de la integral la serie:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$, es divergente, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+2}$, no es absolutamente convergente.

Ahora aplicaremos el criterio de Leibniz, es decir:

Como $a_n = \frac{n^2}{n^3+2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+2}$ de donde: $a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n ≥ 1

y además $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2} = 0$. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+1}$, es condicionalmente convergente.

(46) Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

De acuerdo al teorema **2.8.2** se tiene:

$\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$, de donde por el criterio de la integral se tiene que la serie: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ es convergente, por lo tanto la serie alternada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n\ln(n))^2}$, es absolutamente convergente y desde luego la serie es convergente.

(47) Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

De cuerdo al teorema **2.8.2** se tiene:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^n$, de donde de acuerdo al criterio de la raíz se tiene que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^n$ es convergente, luego la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n$, es absolutamente convergente y por lo tanto la serie alternada es convergente.

(48) Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n-2)}{7.9.11...(2n+5)}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Aplicando el criterio de la razón se tiene:

$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n-2)}{7.9.11...(2n+5)} \Rightarrow u_{n+1} = (-1)^n \frac{1.4.7...(3n+1)}{7.9.11...(2n+7)}$, luego

$k = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2} > 1$, como $k = \frac{3}{2} > 1$, de acuerdo a la parte a **(ii)** del criterio de la razón se concluye que la serie alternada

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n+1)}{7.9.11...(2n+7)}$, es divergente.

(49) Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right)$

Solución

Sea $a_n = n^{-2}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right)$, y tomemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que es divergente (serie armónica), ahora aplicamos el criterio de comparación por limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e - 1 > 0$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, se concluye que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right)$ es divergente.

 Analizar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[|\cos\frac{3\pi}{n} + 2|]}{3^n}$ es convergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{[|\cos\frac{3\pi}{n} + 2|]}{3^n} = \frac{2 + [|\cos\frac{3\pi}{n}|]}{3^n} \le \frac{3}{3^n} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n}$ es convergente

y como $a_n \le b_n$ entonces por el criterio de comparación se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[|\cos\frac{3\pi}{n} + 2|]}{3^n}$, es convergente.

Ahora calcularemos la suma de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[|\cos\frac{3\pi}{n}+2|]}{3^n}=\frac{[|\cos 3\pi+2|]}{3}+\frac{[|\cos\frac{3\pi}{2}+2|]}{3^2}+\frac{[|\cos\frac{3\pi}{3}+2|]}{3^3}+\frac{[|\cos\frac{3\pi}{4}+2|]}{3^4}+$$

$$+\frac{[|\cos\frac{3\pi}{5}+2|]}{3^5}+\frac{[|\cos\frac{3\pi}{6}+2|]}{3^6}+\frac{[|\cos\frac{3\pi}{7}+2|]}{3^7}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[|\cos\frac{3\pi}{n}+2|]}{3^n}=\frac{148}{243}+\left(\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ldots..\right)=\frac{148}{243}+\sum_{n=6}^{\infty}\frac{2}{3^n} \qquad \ldots\textbf{(1)}$$

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3^6}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3^5}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16} \qquad \ldots\textbf{(2)}$$

reemplazando **(2)** en **(1)**, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[|\cos\frac{3\pi}{n}+2|]}{3^n}=\frac{148}{243}+\frac{1}{16}=\frac{2369}{3888}$

2.10. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Hallar la suma de las series infinitas en caso de ser convergente.

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n^2+n}}$ **Rpta.** 1

④ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^P} - \frac{1}{(n+1)^P})$ **Rpta.** 1, P>0

⑤ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n).\ln(n+1)}$ **Rpta.** $\frac{1}{\ln 2}$

⑥ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ **Rpta.** $\frac{3}{4}$

⑦ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+2)}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)}$ **Rpta.** 1

⑨ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(n+1))}{\ln(n)^n.(\ln(n+1)^{n+1})}$ **Rpta.** $\frac{1}{2\ln 2}$

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **Rpta.** 1

⑪ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n^2-2n+2)(n^2+1)}$ **Rpta.** 1

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n(n+1)(n+3)}$ **Rpta.** $\frac{7}{2}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ **Rpta.** $\frac{1}{60}$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+2)(n+4)}$ **Rpta.** $\frac{67}{96}$

(17) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{(n-2)(n+3)n}$ **Rpta.** $\frac{23}{15}$

(18) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)(n+2)n}$ **Rpta.** $\frac{65}{36}$

(19) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$ **Rpta.** $\frac{15}{2}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ **Rpta.** 1

(21) $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{25}{10^n}-\frac{6}{100^n}\right)$ **Rpta.** $\frac{2150}{99}$

(22) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$ **Rpta.** $\frac{1}{5}$

(24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{3^n}$ **Rpta.** $-\frac{3}{2}$

(27) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$ **Rpta.** $\frac{1}{e-1}$

(28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[|\cos\frac{\pi}{n}+1|]}{2^n}$

(29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(30) $\sum_{n=1}^{\infty}(sen\frac{1}{n} - sen\frac{1}{n+1})$ **Rpta.** sen 1

(31) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$ **Rpta.** $\frac{8}{3}$

(32) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[|\,sen\frac{4\pi}{n}+3\,|]}{4^n}$ **Rpta.** $\frac{63.2^{10}+1}{2^{16}}$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2-4}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(34) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n}+e^{n})$ **Rpta.** Divergente

(35) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ **Rpta.** 1

(36) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$ **Rpta.** $\frac{5}{4}$

(37) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}e^{2-3n}3^{4-2n}$

(38) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)}$ **Rpta.** $\frac{1}{2(x+1)(x+2)}$

(40) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)(x+n+1)}$ **Rpta.** $\frac{1}{2x(x+1)}$

(41) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ **Rpta.** $1-\sqrt{2}$

(42) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ **Rpta.** 1

(43) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + ...$ **Rpta.** $\frac{1}{3}$

(44) $\frac{1}{\sqrt{1.3}} + \frac{1}{\sqrt{3.5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + ...$ **Rpta.** Divergente

(45) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [\frac{2n^4 + 28n^3 + 150n^2 + 364n + 337}{(n+3)^4 (n+4)^4}]$ **Rpta.** $\frac{1}{6^3}$

(46) Una pelota se deja caer una altura de 12 m cada vez que golpee el suelo salta a una altura de tres cuartos de distancia de la cual cayo. Encontrar la distancia total recorrido por la pelota antes de quedar en reposo.

(47) Se deja caer una pelota una altura de "a" metros, sobre un piso horizontal, cada vez que la pelota choca contra el suelo, después de caer desde una altura h rebota hasta alcanzar la altura rh, siendo r un número positivo menor que 1. Hállese la distancia total recorrido por la pelota.

(48) ¿Cuál es la distancia total que recorre una pelota de tenis antes de llegar al reposo si se deja caer desde una altura de 100 m y si, después de cada caída, rebota hasta $\frac{11}{20}$ de la distancia desde el cual cayo?

(49) Un triángulo equilátero tiene catetos de 4 unidades de longitud, por lo tanto su perímetro es 12 unidades, otro triángulo equilátero se construye trazando segmentos de recta que pasan por los puntos medios de los catetos del primer triángulo, este triángulo tiene catetos de unidades de longitud y su perímetro es 6 unidades, si este procedimiento se puede repetir un número ilimitado de veces ¿Cuál es el perímetro total de todos los triángulos que se forman?

(50) Después de que una mujer que anda en bicicleta retira los pies de los pedales, la rueda de freno gira 300 veces en los primeros 10 seg. luego en cada período sucesivo de 10 seg. la rueda gira $\frac{4}{5}$ partes de lo del primero anterior. Determinar el número de rotaciones de la rueda antes de detenerse la bicicleta.

II. Determinar la convergencia o divergencia de las series infinitas siguientes:

(51) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + n}$ **Rpta.** Convergente

(52) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ **Rpta.** Divergente

(53) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + n}$ **Rpta.** Convergente

(54) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n+2}$ **Rpta.** Divergente

(55) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,sen(n)+1}{n^3+1}$ **Rpta.** Convergente

(56) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n}$ **Rpta.** Divergente

(57) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+n^2}$ **Rpta.** Convergente

(58) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ **Rpta.** Divergente

(59) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$ **Rpta.** Divergente

(60) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)2^n}$ **Rpta.** Convergente

(61) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+\sqrt{n}}$ **Rpta.** Divergente

(62) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+2)}$ **Rpta.** Divergente

(63) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+1)}}$ **Rpta.** Convergente

(64) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sec(n)|}{\sqrt{n}}$ **Rpta.** Divergente

(65) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+10^6 sen^2 3n}{n^2}$ **Rpta.** Converge

(66) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n\theta)}{n^2}$ **Rpta.** Convergente

(67) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+100}$ **Rpta.** Divergente

(68) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ **Rpta.** Convergente

(69) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(n)}$ **Rpta.** Convergente

(70) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^{\frac{1}{n}}}$ **Rpta.** Divergente

(71) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+3}$ **Rpta.** Diverge

(72) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ **Rpta.** Diverge

(73) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ **Rpta.** Diverge

(74) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ **Rpta.** Converge

(75) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ **Rpta.** Diverge

(76) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ **Rpta.** Converge

(77) $\sum_{n=1n}^{\infty} (\frac{1}{n} - e^{-n^2})$ **Rpta.** Diverge

(78) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ **Rpta.** Converge

(79) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n.n}$ **Rpta.** Converge

(80) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1}$ **Rpta.** Converge

(81) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$ **Rpta.** Diverge

(82) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$ **Rpta.** Diverge

(83) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ **Rpta.** Diverge

(84) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-5}{n^5}$ **Rpta.** Diverge

(85) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{n^3}$ **Rpta.** Converge

(86) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ **Rpta.** Converge

(87) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ **Rpta.** Diverge

(88) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen^2(n)}{2^n}$ **Rpta.** Converge

(89) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ **Rpta.** Converge

(90) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\ln(n)}{n^2+10n^3}}$ **Rpta.** Diverge

(91) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n.5^n}$ **Rpta.** Converge

(92) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+3}}$ **Rpta.** Diverge

(93) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)+\sqrt{\ln^3(n)}}$ **Rpta.** Diverge

(94) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{n}-\sqrt{n}}$ **Rpta.** Converge

(95) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ **Rpta.** Converge

(96) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)(n+2(n+3)}$ **Rpta.** Converge

(97) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(n+4)}$ **Rpta.** Converge

(98) $\sum_{n=1}^{\infty}tg(\frac{\pi}{4^n})$ **Rpta.** Converge

(99) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3^n+1)2^n}$ **Rpta.** Converge

(100) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+e^n}$ **Rpta.** Converge

(101) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ **Rpta.** Converge

(102) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$ **Rpta.** Converge

(103) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ **Rpta.** Converge

(104) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+2}$ **Rpta.** Converge

(105) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$ **Rpta.** Diverge

(106) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ **Rpta.** Converge

(107) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)(n-2)}$ **Rpta.** Diverge

(108) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ **Rpta.** Diverge

(109) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ **Rpta.** Converge

(110) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ **Rpta.** Diverge

(111) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{4n}}$ **Rpta.** Diverge

(112) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **Rpta.** Converge

(113) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ **Rpta.** Converge

(114) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ **Rpta.** Diverge

(115) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ **Rpta.** Converge

(116) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!.3^n}$ **Rpta.** Converge

(117) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n}$ **Rpta.** Converge

(118) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-n^2}$ **Rpta.** Converge

(119) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **Rpta.** Diverge

(120) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(\frac{\pi n}{2})}{e^n}$ **Rpta.** Converge

(121) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ **Rpta.** Converge

(122) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!.n!.3^n}$ **Rpta.** Converge

(123) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ **Rpta.** Converge

(124) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{-n} n!}{1.3.5.7.9...(2n-1)}$ **Rpta.** Converge

(125) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ **Rpta.** Diverge

(126) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$ **Rpta.** Converge

(127) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+1}$ **Rpta.** Diverge

(128) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ **Rpta.** Converge

(129) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ **Rpta.** Converge

(130) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$ **Rpta.** Converge

(131) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5n^n}$ **Rpta.** Converge

(132) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$ **Rpta.** Converge

(133) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 3)^n}$ **Rpta.** Converge

(134) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+2)}$ **Rpta.** Diverge

(135) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **Rpta.** Converge

(136) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3+1}$ **Rpta.** Diverge

(137) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ **Rpta.** Converge

(138) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ **Rpta.** Diverge

(139) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ **Rpta.** Diverge

(140) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n).\ln(\ln(n))}$ **Rpta.** Diverge

(141) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$ **Rpta.** Converge

(142) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{\ln(n)})^{\frac{3}{2}}$ **Rpta.** Converge

(143) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+10^6}$ **Rpta.** Diverge

(144) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$ **Rpta.** Converge

(145) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ **Rpta.** Converge

(146) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$ **Rpta.** Converge

(147) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$ **Rpta.** Converge

(148) $\sum_{n=1}^{\infty}\csc h(n)$ **Rpta.** Converge

(149) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+3}{n})$ **Rpta.** Diverge

(150) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ **Rpta.** Diverge

(151) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ **Rpta.** Converge

(152) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ **Rpta.** Diverge

(153) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ **Rpta.** Converge

(154) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsen(\frac{1}{\sqrt{n}})$ **Rpta.** Diverge

(155) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ **Rpta.** Converge

(156) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^{\ln(\ln(n))}}{n.\ln(n)}$ **Rpta.** Diverge

(157) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n+1)}$ **Rpta.** Diverge

(158) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ **Rpta.** Converge

(159) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{e}{3})^n$ **Rpta.** Converge

(160) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ **Rpta.** Converge

(161) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ **Rpta.** Converge

(162) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n}{2n-1})^n$ **Rpta.** Diverge

(163) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$ **Rpta.** Converge

(164) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n^2+2})^n$ **Rpta.** Converge

(165) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ **Rpta.** Converge

(166) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$ **Rpta.** Converge

(167) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$ **Rpta.** Converge

(168) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{e^{n^2}}$ **Rpta.** Converge

(169) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ **Rpta.** Converge

(170) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ **Rpta.** Converge

(171) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}+1)^n$ **Rpta.** Diverge

(172) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$ **Rpta.** Diverge

(173) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ **Rpta.** Diverge

(174) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **Rpta.** Diverge

(175) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ **Rpta.** Diverge

(176) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$ **Rpta.** Converge

(177) $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{2}{3})^n$ **Rpta.** Converge

(178) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{sen\,\alpha}{n})^n$ **Rpta.** Converge

(179) $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})$ **Rpta.** Diverge

(180) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}.\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{4.6.8...(2n+2)}$ **Rpta.** Converge

(181) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}})$ **Rpta.** Diverge

(182) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}-1)$ **Rpta.** Diverge

(183) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln(n)}}$ **Rpta.** Diverge

(184) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln(n)}}$ **Rpta.** Converge

(185) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ **Rpta.** Converge

(186) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{n}}}$ **Rpta.** Diverge

(187) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+4}}$ **Rpta.** Diverge

(188) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+2}{\ln(n+1)}$ **Rpta.** Diverge

(189) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[4]{n^5}}$ **Rpta.** Converge

(190) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{4.8.12...(4n)}$ **Rpta.** Diverge

(191) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^n}$ **Rpta.** Converge

(192) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \operatorname{tg}(\frac{1}{n}).\ln(\frac{n+1}{n})$ **Rpta.** Converge

(193) $\sum_{n=1}^{\infty} ((\frac{n+1}{n})^{n+1} - \frac{n+1}{n})^{-n}$ **Rpta.** Converge

(194) $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{7} + (\frac{7}{10})^{\frac{3}{2}} + ... + (\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{n}{2}} + ...$ **Rpta.** Converge

(195) $\frac{3}{3} + (\frac{6}{5})^2 + (\frac{9}{7})^3 + ... + (\frac{3n}{2n+1})^n + ...$ **Rpta.** Diverge

(196) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ **Rpta.** Convergente (sug. $\frac{n^3}{n!} < \frac{n^3}{n^5}$)

(197) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n).\ln(n+1)}$

Rpta. Divergente (sug. probar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n)}$ diverge)

(198) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+2\ln(n)}$ **Rpta.** Divergente (sug. comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$)

(199) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - \text{sen}^2(100^n)}$

Rpta. Convergente (sug. $\frac{\sqrt{n}}{n^2 - \text{sen}^2 100^n} < \frac{\sqrt{n}}{n^2 - 1} < \frac{2}{n^{3/2}}$)

(200) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3 \ln(n)}$ **Rpta.** Divergente (sug. $\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3 \ln(n)} > \frac{1}{n\ln(n)}$)

(201) Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^P}$ es convergente si y solo si P > 1.

(202) Demostrar que la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n).(\ln(\ln(n)))^P}$ es convergente si y solo si P>1

III. Ejercicios sobre convergencia y divergencia.

(203) Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n-1})^{\alpha}$

Rpta. Converge para $\alpha > 1$

(204) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n\ln(\frac{n+2}{n+1}) - 1)$ si es convergente ó divergente.

Rpta. Divergente

(205) Demostrar que la serie de términos positivos $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$, converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha<1$, y que si $\alpha = 1$ solo converge cuando $\beta > 1$.

(206) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\text{tg}^{n}(a+\frac{a}{n})$

Rpta. tg a > 1 Convergente

tg a ≤ 1 Divergente

(207) Estudiar según los valores de α y β la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}n^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^{\beta}$$

Rpta. $\beta > \alpha$ Convergente

$\beta \leq \alpha$ Divergente

(208) En la hipótesis en donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son convergente se pregunta:

a) ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$? **Rpta.** Si

b) ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty}a_n.b_n$? **Rpta.** Si

c) ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n b_n}$? **Rpta.** Si

d) Si la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es monótona, demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n b_n$ es convergente.

(209) Para que valores de r converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^r}$

Rpta. r > 1

(210) Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)})^P$, converge para P > 2 y diverge para P ≤ 2 (criterio de Roobe)

(211) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6.8..(2n)}{1.3.5.7..(2n-1)}$

Rpta. Divergente (criterio de Raabe)

(212) Analizar la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^n.(\ln(\ln(n)))^S}$

Rpta. Si S<1, la serie es Divergente.

Si S ≥ 1, la serie es Convergente

(213) Determinar para que valores del parámetro "a" converge y para cuales diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + n^a} - n^2)$

Rpta. Converge para a < 1 y diverge para a ≤1

(214) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} n^S(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ converge para $S<\frac{1}{2}$ y diverge $S\geq\frac{1}{2}$.

(215) Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ diverge

(216) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2(\frac{\pi n}{3})}{2^n}$

Rpta. Converge

(217) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\ln(4n+1)}{n(n+1)}$ **Rpta.** Converge

(218) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ($a_n > 0$) divergente. Si $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ demostrar que:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ Diverge **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ Diverge

iii) $\sum_{n=1}\frac{a_n}{(S_n)^2}$ Converge

(219) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) una serie convergente, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n.a_{n+1}}$ Converge.

(220) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ decreciente, ($a_n > 0$) Si $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n.a_{n+1}}$ converge, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge.

(221) Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4n^2}{n!+7n}$

Rpta. Converge

(222) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n.n!}{n^n}$ es divergente.

IV. Determinar si la serie dada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente ó divergente.

(223) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente.

(224) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(225) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(226) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(227) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(228) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+2)}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(229) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(230) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n)}{n^2}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(231) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(232) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{10^n}$ **Rpta.** Divergente

(233) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(234) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+10}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(235) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)})^3$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(236) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2n+100}{3n+1})^n$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(237) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}$ **Rpta.** Divergente

(238) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(e^n+e^{-n})}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente.

(Sug. $e^n+e^{-m}<2e^n$)

(239) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^2(n+1)}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(sug: $\frac{1}{n\ln^2(n+1)}\leq\frac{1}{n\ln^2(n)}$)

(240) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(1+\frac{1}{n})}$ **Rpta.** Divergente (sug: $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$)

(241) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\frac{3}{7}}}{(n+1)!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(242) $\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}(\ln(n))$ **Rpta.** Divergente

(243) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(sug: criterio de la razón a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n}$)

(244) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n \operatorname{sen}\frac{1}{n})$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(sug: $n \operatorname{sen}\frac{1}{n} \le 1 \;\Rightarrow\; \ln(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}) \le 0$)

(245) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n})$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(246) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos\frac{1}{n})$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(247) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}(\frac{1}{2n+1})$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(248) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})}$ **Rpta.** Divergente

(249) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\frac{n^{100}}{2^n})$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(250) $\sum_{n=1} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(sug.: $\operatorname{sen}\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$ de donde $\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{n} \le \frac{1}{n^2}$)

(251) $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen}(\frac{1}{n}))^{\frac{3}{2}}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(252) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(253) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(\pi n)}{n!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(254) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n)+\operatorname{sen}(2\pi n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(255) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(256) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n)+\cos(3n)}{n^2+n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(257) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ **Rpta.** Divergente

(258) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(259) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ **Rpta.** Divergente

(260) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

261 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n2^n}$ **Rpta.** Divergente

262 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-1}{4^n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

263 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

264 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^3+1}$ **Rpta.** Divergente

265 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10}{(5n-2)^{\frac{1}{4}}}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

266 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$ **Rpta.** Divergente

267 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^{\frac{2}{3}}-1}{4^n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

268 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-3)!}{3^{n-1}}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

269 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(270) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{1000n+10}$ **Rpta.** Divergente

(271) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(272) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ **Rpta.** Divergente

(273) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(274) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^4+2}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(275) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{4}{3})^n}{n^2}$ **Rpta.** Divergente

(276) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n-1}}{n.n!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(277) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{1.3.5...(2n-1)}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(278) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(279) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2.4.6...(2n)}{1.4.7...(3n-2)}$$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(280) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})$$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(281) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(282) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n^2+1)^{\frac{4}{3}}}$$ **Rpta.** Divergente

(283) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^{n-1}}$$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(284) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(285) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(286) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(287) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$ **Rpta.** Divergente

(288) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(n\pi)}{(m+1)(n+2)}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(289) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n(\frac{\pi}{4})}{n!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(290) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{10^6 n+1}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(291) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(sug.: $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \le \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$)

(292) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+\text{sen}(n)}{n^3}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(293) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \text{tg}(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(sug.: $\text{tg}(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$)

(294) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{3n+1}}{(3n+1)!}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(295) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.4.7...(3n-2)}{7.9.11...(2n+5)}$ **Rpta.** Divergente

(296) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(297) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(298) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6n^2 - 9n + 2}{n^3}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(299) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^3}$ **Rpta.** Divergente

(300) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 2}$ **Rpta.** Condicionalmente Convergente

(301) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^7 7^{n+3}}{2^{3n}}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

(302) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + n(\frac{\pi}{2}))}{n+1}$ **Rpta.** Convergente

(303) Calcular la suma de la serie: $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

(304) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$, si converge calcular su suma.

Rpta. $\frac{1}{1+a}$

305 Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[\frac{2n^3+33n^2+183n+341}{(n+5)^3(n+6)^3}]$

Rpta. $\frac{1}{6^3}$

306 Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3(n+1)^n}$ **Rpta.** 1

307 Determinar la convergencia o divergencia de la serie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n^2+1}{n^2+1})$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{7n}}$ converge

308 Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{4n-1}+(-1)^n\frac{1}{n}]$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n^2+1}{n^3+4n+1}+(-1)^n\frac{1}{n^2}]$

309 Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n^2[\frac{5+(-2)^n}{9}]^n$

310 Estudiar según los valores de a y b la serie siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^a[\ln(\frac{n+1}{n-1})]^b$$

311 Las siguientes series son convergentes, calcular sus sumas.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2^n-1}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(\frac{2n+1}{1+n^2(n+1)^2})$

(312) Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2^n-1}$

(313) Estudiar las siguientes series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2-9n+4}{n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2.2^n}{(2n)!}$

(314) Analizar la convergencia o divergencia de la serie.

a) $\sum_1 = \frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+...$ b) $\sum_2 = \log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+...$

(315) Analizar la siguiente serie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)(k+n+1)})$ **Rpta.** Diverge

(316) Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3n)(5+3n)(8+3n)}$

(317) Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{\pi}{2}-\text{arctg.}(\ln(n))]$ analizar.

(318) Demostrar que la suma de la serie de término n-ésimo $\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}+\frac{1}{8n-3}+\frac{1}{8n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$, tiene como serie $\frac{3}{2}\ln 2$

es decir $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}+\frac{1}{8n-3}+\frac{1}{8n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}]=\frac{3}{2}\ln 2$.

(319) Sumar las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n^3+3n^2+3n+1)}{n^3(n+1)^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+8n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{arctg}.(\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{1+n^4(n+1)^4})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,(\frac{1}{4})$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)5^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2^n}{(2n+1)!}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-5^n)^2.7^{-2n}$

(320) Estudiar la convergencia de la serie.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\frac{1}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n\,\text{sen}^3(\frac{a}{3^{n+1}})\;,\;a>0$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n(n+1)+4}{3^n+n^3}$

321 Determinar la convergencia ó divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots+\frac{n+1}{n+2}\right)}$$ **Rpta.** Convergente

322 Determinar la convergencia ó divergencia.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.6.11.16...(5n-4)}{2.6.10.14...(4n-2)}$ **Rpta.** Divergente

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5.7...(4n-1)}{2.4.6.8...(4^n)}$ **Rpta.** Divergente

323 analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)}{(q+1)(q+2)(q+3)...(q+n)}$

Rpta. **i)** $q > p+1$ converge (por Raabe)

ii) $q < p+1$ diverge

iii) $q = p+1$ diverge

324 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+68}\int_0^{1+\frac{1}{n}}(x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+8)^{-2}\,dx$ **Rpta.** Diverge

325 Hallar la suma de las series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+37n+34}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ **Rpta.** $\frac{11}{4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(326) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^{n+1}(\frac{\pi}{4})}{(n+3)!}$ y en caso de convergencia, hallar la suma.

(327) Estudiar la convergencia de las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{4n-1}+(-1)^{n}\frac{1}{n}]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n^{2}+1}{n^{3}+4n+1}+(-1)^{n}\frac{1}{n^{2}}]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{7}(\frac{1+(-1)^{n}}{7})^{n}$

CAPÍTULO III

3. SERIES DE POTENCIAS

3.1 DEFINICIÓN.-

Una serie de la forma: $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

donde: a y los c_i, i =1,2,.....,n son constantes, es llamada serie de potencia en x – a.

Cuando a = 0, se tiene la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ que se denomina serie de potencia en x

OBSERVACIÓN.-

1° Cuando x toma un valor particular, obtenemos una serie numérica de los que ya se ha estudiado.

2° Si una serie converge para ciertos valores de x, podemos definir una función de x haciendo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ó} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde el dominio de estas funciones son todos los valores de x para los cuales la serie converge.

3° Para determinar los valores de x, para los cuales la serie de potencia converge, se usan los criterios anteriores, especialmente el criterio de la razón.

3.2. PROPIEDADES.-

Consideremos la serie de potencia siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

1° Si esta serie diverge para x – a = c, entonces diverge para todos los valores de x, para los cuales $|x - a| > |c|$.

2° Si ésta serie converge para x - a = b, entonces es absolutamente convergente para todos los valores de x para los cuales $|x - a| < |b|$.

3° Se cumple exactamente una de las condiciones siguientes:

i) La serie converge solamente cuando x -a = 0

ii) La serie es absolutamente convergente para todos los valores de x.

iii) Existe un número P > 0, tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x, para los cuales $|x - a| < P$ y diverge para todos lo valores de x, para los cuales $|x - a| > P$.

3.3. DEFINICIÓN.-

i) El conjunto de todos los valores de x, para los cuales una serie de potencia converge, se llama intervalo de convergencia.

ii) El número P > 0 de la propiedad **3° iii)** se llama radio de convergencia de la serie de potencia.

OBSERVACIÓN.- Si P es radio de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, entonces el intervalo de convergencia es uno de los intervalos siguientes <a - p, a + p>, [a - p, a + p> , <a - p, a + p] y [a - p, a + p]

Ejemplo.- Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ y el radio de convergencia.

<u>**Solución**</u>

Sea $u_n = \frac{x^n}{n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, luego por el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n\ x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| < 1$$

como $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$.

Ahora analizaremos para $|x| = 1$, es decir para $x = \pm 1$.

Si $x = -1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente.

Si $x = 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica).

Luego el intervalo de convergencia es [-1,1>y el radio de convergencia es p =1

3.4. DIFERENCIACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS.-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencia con radio de convergencia p > 0 y si

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, entonces existe

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n(x-a)^{n-1}$, $\forall x \in <a-p,a+p>$

Además, p es también el radio de convergencia de ésta serie, es decir, si p ≠ 0 es el radio de convergencia de una serie de potencia, la cual define una función f, entonces f es diferenciable en <a - p, a + p> y la derivada de f se puede obtener derivando la serie de potencia término a término.

3.5. INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS.-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencia con radio de convergencia p > 0 y

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, entonces f es integrable en todo subintervalo

cerrado de <a - p, a + p> y $\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ donde: x∈ <a - p, a+ p>, además p es también el radio de convergencia de la serie resultante.

Es decir: Si p ≠ 0 es el radio de convergencia de una serie de potencia, la cual define una función f, entonces f es integrable en todo subintervalo cerrado de <a - p, a + p> y la integral de f se obtiene integrando la serie de potencia término a término.

3.6. SERIE DE TAYLOR.-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencia con radio de convergencia p, entonces definimos la función f de la siguiente forma:

$$\boxed{f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...} \qquad ...\ (1)$$

Para todo x ∈ <a - p, a + p>.

Ahora buscaremos la relación que existe entre los coeficientes $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$, con la función f y sus derivadas al evaluar en el punto a.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... \Rightarrow f(a) = c_0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + ... \Rightarrow f'(a) = c_1$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a)^2 + ... \Rightarrow \frac{f''(a)}{2!} = c_2$$

$$f'''(x) = 1.2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-a) + 3.4.5c_5(x-a)^2 + ... \Rightarrow \frac{f'''(a)}{3!} = c_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3....nc_n + 2.3....(n+1)c_{n+1}(x-a) + ... \Rightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n$$

Reemplazando $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ en la ecuación **(1)**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + .. + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + ..$$

por lo tanto: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Luego a la serie de potencia de la función f, representado por:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se denomina serie de Taylor alrededor del punto a

OBSERVACIÓN.- Si en la serie de Taylor $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, hacemos a = 0, se tiene la siguiente serie.

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

A esta serie se llama serie de **Maclaurin**.

Ejemplo.- Desarrollar en serie de Maclaurin la función $f(x)=e^x$

Solución

$$\begin{cases} f(x)=e^x & & f(0)=1 \\ f'(x)=e^x & & f'(0)=1 \\ f''(x)=e^x & \Rightarrow & f''(0)=1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f^{(n)}(x)=e^x & & f^{(n)}(0)=1 \end{cases} \qquad \textbf{... (1)}$$

Como el desarrollo de la serie de **Maclaurin** es:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+.....+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+..... \quad \textbf{... (2)}$$

Al reemplazar **(1)** en **(2)** se tiene: $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...\frac{x^n}{n!}+....$

$$\therefore \quad f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

3.7. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{3^n.n^3}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n=\frac{(-1)^n(x+1)^n}{3^n.n^3} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}.(n+1)^3}$

Ahora aplicamos el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n.n^3(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)^3(-1)^n(x+1)^n}\right|=\frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3=\frac{|x+1|}{3}<1$$

Como $\left|\frac{x+1}{3}\right|<1 \Rightarrow |x+1|<3 \Rightarrow -3<x+1<3$

$$\therefore \quad -4<x<2$$

Ahora analizaremos cuando $\left|\frac{x+1}{3}\right|=1$, es decir para x = -4, x = 2

Si x = -4 se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{3^n.n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ es convergente.

Si x = 2 se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}$ es convergente.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es [-4, 2] y el radio de convergencia es p = 3.

(2) Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n.(2n)!}$ y el radio de convergencia.

Solución

Como $u_n=\frac{(-1)^{n+2}(n!)^2(-2)^n}{2^n.(2n)!} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}((n+1)!)^2(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}.(2n+2)}$

Aplicando el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n.(2n)!(-1)^{n+2}((n+1)!)^2(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+2)!(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}\right|$$

$$=\left|\frac{x-2}{2}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2+6n+2}=\frac{|x-2|}{8}<1$$

Como $|x-2|<8 \Rightarrow -8<x-2<8 \Rightarrow -6<x<10$

Ahora analizaremos para $\frac{|x-2|}{8}=1$, es decir para x = -6, x = 10

Si x = -6 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(-8)^n}{2^n(2n)!}$ es divergente (criterio de comparación).

Si x = 10 se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2 8^n}{2^n (2n)!}$ es divergente (criterio de comparación).

Luego el intervalo de convergencia es <-6, 10> y el radio de convergencia es p = 8.

③ Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n = (-1)^n \frac{x^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, aplicando el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n! x^{n+1}}{(-1)^n (n+1)! x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x|.(0) = 0 < 1 \quad \forall \ x \in R.$$

Luego la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ es convergente, ∀ x ∈ R y el radio de convergencia p = ∞.

③ Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n! x^n}{3^n}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n = \frac{(-1)^n n! x^n}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! x^{n+1}}{3^{n+1}}$

por el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1}3^n}{(-1)^n \; n!x^n.3^{n+1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = +\infty$$

Luego para $x \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \infty$, cuando $x \to \infty$, por lo tanto la serie de potencia converge cuando $x = 0$ y el radio de convergencia es $p = 0$.

⑤ Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x-3)^n}{1.3.5...(2n-1)}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n = \frac{n!(x-3)^n}{1.3.5...(2n-1)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)!(x-3)^{n+1}}{1.3.5...(2n+1)}$

por el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x-3)^{n+1}(1.3.5....(2n-1)}{n!(x-3)^n(1.3.5...(2n+1))}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x-3|\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = |x-3|\left(\frac{1}{2}\right) < 1$$

$\Rightarrow |x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$

Ahora analizaremos cuando $|x-3| = 2$ es decir para $x = -1$, $x = 5$

Si $x = -1$ se tiene $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(-4)^n}{1.3.5...(2n-1)}$ es divergente (probar).

Si $x = 5$ se tiene $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!2^n}{1.3.5...(2n-1)}$ es divergente (probar).

Luego la serie de potencia converge en <1, 5> y el radio de convergencia es $p = 2$.

(6) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^n)x}{n\sqrt{n}}$.

Solución

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n^n x)|}{n\sqrt{n}}$, como $|\text{sen}\, n^n\ x| \le 1$

$\forall\ n \in Z^+ \ \wedge\ \forall\ x \in R \Rightarrow \frac{|\text{sen}(n^n x)|}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^{3/2}}$, y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n^n x)|}{n\sqrt{n}}$ es convergente, luego es absolutamente convergente.

(7) Representar en serie de **Maclaurin** a la función $f(x) = e^{-x^2}$

Solución

Se conoce que $g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$f(x) = g(-x^2) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

(8) Desarrollar en serie de Maclaurin la función f(x) = sen x.

Solución

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{sen}x & f(0)=0 \\ f'(x)=\cos x & f'(0)=1 \\ f''(x)=-\operatorname{sen}x & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-\cos x \quad \Rightarrow & f'''(0)=-1 \\ f^{iv}(x)=\operatorname{sen}x & f^{iv}(0)=0 \\ f^{v}(x)=\cos x & f^{v}(0)=1 \\ f^{v}{}'(x)=-\operatorname{sen}x & f^{v}{}'(0)=0 \end{cases} \qquad \text{... (1)}$$

Como la serie de **Maclaurin** es:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\ldots.. \qquad \text{... (2)}$$

Ahora reemplazando **(1)** en **(2)** se tiene:

$$f(x)=\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots..+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\therefore\ f(x)=\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(9) Desarrollar en serie de Maclaurin la función f(x) = sen h x.

Solución

Se conoce que: $\operatorname{senh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ y además se tiene:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+....+\frac{x^{n}}{n!}+.....$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+....+(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!}+.....$$

$$e^{x}-e^{-x}=2x+2(\frac{x^{3}}{3!})+2(\frac{x^{5}}{5!})+....+2(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})+.....$$

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+....+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+.....$$

$$\therefore\quad f(x)=\operatorname{senh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(10) Probar que: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\frac{1}{1+x^{2}}$, sobre <-1,1>

Solución

Mediante la serie geométrica convergente se tiene:

$1+x+x^{2}+.....+x^{n-1}+....=\frac{1}{1-x}$, para $|x|<1$, valiéndose de esta serie tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=1-x^{2}+x^{4}-x^{6}+x^{8}+...$$

$$=1+(-x^{2})+(-x^{2})^{2}+(-x^{2})^{3}+(-x^{2})^{4}+...$$

$$=\frac{1}{1-(-x^{2})},\qquad \text{para } |x^{2}|<1$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, para $|x| < 1$

puesto que: $|x^2| < 1 \Rightarrow |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$

(11) Mostrar que: $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, si $|x| < 1$

Solución

De acuerdo al ejercicio 10. se tiene:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots\ , \qquad \text{para } |x| < 1$$

Ahora integramos esta serie término a término.

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + \ldots\right) dt$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad \text{si } |x| < 1$$

(12) Obtener una representación en serie de potencia de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Solución

De acuerdo a la serie geométrica convergente, se tiene:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$, si $|x| < 1$, derivando miembro a miembro se tiene:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} + \dots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{para } |x| < 1$$

(13) Verifica que: $\displaystyle\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$

Solución

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$, es convergente $\forall$ x, pues $\dfrac{\text{sen}(nx)}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$ y como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es convergente, afirmamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$, es convergente, $\forall$x, a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ expresaremos en la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} = \text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,2x}{4} + \frac{\text{sen}\,3x}{9} + \dots + \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} + \dots$$

Integrando miembro a miembro de 0 a π se tiene:

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} dx = \int_0^{\pi} \left(\text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,2x}{4} + \dots + \frac{\text{sen}\,nx}{n^2} + \dots\right) dx$$

$$= \left(\cos x + \frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 3x}{27} + \dots + \frac{\cos nx}{n^3}\right) \Big/_0^{\pi}$$

$$= -\left[\left(-1+\frac{1}{2.4}-\frac{1}{3.9}+\frac{1}{4.16}-\frac{1}{5.25}+\ldots\right)\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{4.16}+\frac{1}{5.25}+\ldots\right)\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.25}+\ldots\right] = 2\left[1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^3}$$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^3}$$

(14) Encontrar una representación en serie de potencia de: $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Solución

Se conoce que: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, ahora reemplazamos x por $-t^2$

se tiene: $e^{-t^2} = 1-t^2+\frac{t^4}{2!}+\ldots(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\ldots$

Luego integramos miembro a miembro de 0 a x.

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x\left(1-t^2+\frac{t^4}{2!}+\frac{t^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\ldots\right)dt$$

$$= \left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{2!5}-\frac{t^7}{3!7}+\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\ldots\right)\Big/_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + ...$$

$$\therefore \quad \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

(15) Calcular aproximadamente con tres cifras decimales el valor de: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$

Solución

De acuerdo al ejercicio 14 se tiene:

$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + ...$, para $x = \frac{1}{2}$ se tiene:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5370} + ...$$

$$= 0.5 - 0.04117 + 0.0031 - 0.0002 + ... = 0.4614$$

(16) Encontrar una serie de potencias en x que sea convergente a la función $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$.

Solución

De acuerdo a la serie geométrica convergente se tiene:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ...$, si $|x| < 1$, ahora reemplazamos x por -x se tiene:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ... \quad \text{si } |x| < 1$$

Integrando miembro a miembro se tiene:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...$$

Nuevamente en la serie geométrica reemplazamos x por $-x^2$ obteniéndose la serie:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+... \quad \text{si } |x|<1.$$

Multiplicando las dos series se tiene:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{13}{15}x^5+... \quad \text{si } |x|<1$$

(17) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}n!}$, si es convergente. Hallar su suma.

Solución

Para determinar la convergencia aplicamos el criterio de la razón.

Sea $\quad a_n=\frac{1}{8^{n+1}n!} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{8^{n+2}(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8(n+1)}=0<1 \Rightarrow \text{ la serie es convergente.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}n!}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n n!}=\frac{1}{8}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n n!}\right) \quad ...(1)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{8})^n}{n!}=e^{\frac{1}{8}}$, $\left(\sum_{n=e}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\right)$ **... (2)**

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene: $e^{1/8}=\frac{1}{8}(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!8^n})$

$$\frac{e^{1/8}}{8}=\frac{1}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!8^{n+1}}, \quad \text{de donde: } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!8^{n+1}}=\frac{e^{\frac{1}{8}}}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(e^{\frac{1}{8}}-1)$$

(18) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}$, si converge calcular la suma

Solución

Para determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}$ aplicaremos el criterio de la razón.

Sea $a_n=\frac{(n+4)!}{3!n!4^n} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+5)!}{3!(n+1)!4^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)!3!n!4^n}{(n+4)!3!(n+1)!4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{(n+1)4}=\frac{1}{4}<1$, entonces la serie

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}$, es convergente, ahora calcularemos la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{3!4^n}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+10n^3+35n^2+50n+24}{4^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\frac{1}{4})^n + 10\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (\frac{1}{4})^n + 35\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\frac{1}{4})^n + 50\sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{1}{4})^n + 24\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^n \text{ ...(1)}$$

Ahora utilizamos la serie de potencia: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \text{ derivando:}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + n\,x^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ multiplico por x}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + ... + n\,x^n + ... = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\; x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Como $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + n\,x^n + ... = \frac{x}{(1-x)^2}$, derivando:

$$1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + ... + n^2\, x^{n-1} + ... = \frac{x+1}{(1-x)^3}, \text{ multiplico por x}$$

$$x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + ... + n^2\, x^n + ... = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

Como $x+2^2x^2+3^2x^3+...+n^2x^n+...=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$, derivando:

$$1+2^3x+3^3x^2+...+n^3x^{n-1}+...=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4},\text{ multiplico por x}$$

$$x+2^3x^2+3^3x^3+...+n^3x^n+...=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

Nuevamente derivando la expresión:

$$x+2^3x^2+3^3x^3+...+n^3x^n+...=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$1+2^4x+3^4x^2+...+n^4x^{n-1}+...=\frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5},\text{ multiplico por x}$$

$$x+2^4x^2+3^4x^3+...+n^4x^n+...=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^4x^n=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$$

Ahora reemplazamos $x=\dfrac{1}{4}$ en las series obtenidas

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{4})^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n=\frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n=\frac{1}{3} \qquad \text{... (2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{4})^n=\frac{4}{9} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{4})^n=\frac{20}{27} \qquad \text{... (3)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3(\frac{1}{4})^n=\frac{132}{81} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}n^4(\frac{1}{4})^n=\frac{1140}{243} \qquad \text{... (4)}$$

Reemplazando **(2), (3), (4)** en **(1)** se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}=\frac{1}{6}[\frac{1140}{243}+\frac{1320}{81}+\frac{700}{27}+\frac{200}{9}+8]$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}=\frac{9372}{729}$$

(19) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x|<1$ aplicar esta fórmula para sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)10^{2n}}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} \qquad \text{... (1)}$$

Como $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+...$ si $|x|<1$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$-x - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -1 - \frac{1}{x}\ln(1-x) \qquad \dots \textbf{(2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad \dots \textbf{(3)}$$

Ahora reemplazando **(2)**, **(3)** en **(1)** se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\ln(1-x) - (-1 - \frac{1}{x}\ln(1-x))$$

$$= 1 + (\frac{1}{x} - 1)\ln(1-x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(10^{2n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{100})^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}}\ln(1-\frac{1}{100}) = 1 + 99\ln\frac{99}{100}$$

(20) Desarrollar $F(x) = \frac{1}{x}$ en serie de potencias alrededor de x = 2.

Solución

$$F(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \text{ , de donde:}$$

$$F(x)=\frac{1}{x}=F(2)+F'(2)(x-2)+\frac{F''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{F'''(2)}{3!}(x-2)^3+...$$

$$F(x)=\frac{1}{x}=F'(x)=-\frac{1}{x^2},\ F''(x)=\frac{2}{x^3},\ F'''(x)=-\frac{6}{x^4},...$$

$$F(2)=\frac{1}{2}=F'(2)=-\frac{1}{4},\ F''(2)=\frac{2}{8},\ F'''(2)=-\frac{6}{16},...$$

$$F(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{2!}{3^3}\frac{(x-2)^2}{2!}-\frac{3!}{2^4}\frac{(x-2)^3}{3!}+...$$

$$\therefore\ F(x)=\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n$$

(21) Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{2n}}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}[n^2(\frac{1}{e^2})^n-8n(\frac{1}{e^2})^n+16(\frac{1}{e^2})^n]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{e^2})^n-8\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{e^2})^n+16\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{e^2})^n \qquad ...(1)$$

Ahora aplicamos la serie geométrica convergente.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+x^n+... \qquad \text{si } |x|<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$, donde: para $x=\frac{1}{e^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n=\frac{1}{e^2-1} \qquad \text{... (2)}$$

Como $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+x^n+...$ si $|x|<1$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+...+nx^{n-1}+...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=\frac{x}{(1-x)^2}\text{, donde: para } x=\frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{e^2}\right)^n=\frac{e^2}{(e^2-1)^2} \qquad \text{... (3)}$$

Como $\dfrac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+...+n\,x^n+...$ si $|x|<1$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3}=1+2^2x+...+n^2x^{n-1}+...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{x+1}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\text{, donde: para } x=\frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{1}{e^2}\right)^n=\frac{e^2+e^4}{(e^2-1)^3} \qquad \text{... (4)}$$

Ahora reemplazando **(2), (3), (4)** en **(1).**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{2n}}=\frac{e^4+e^2}{(e^2-1)^3}-\frac{8e^2}{(e^2-1)^2}+\frac{16}{e^2-1}=\frac{9e^4-23e^2+16}{(e^2-1)^3}$$

(22) Comprobar la representación en serie de potencia: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ para, $|x| < 1$

Solución

Aplicando la serie geométrica convergente, es decir:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n + ..., \text{ si } |x| < 1$$

Ahora derivamos miembro a miembro.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + ... + n x^{n-1} + ..., \text{ si } |x| < 1$$

Multiplicando ambos miembros por x, es decir:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + ... + n x^n + ..., \text{ de donde:}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{para } |x| < 1.$$

(23) Comprobar la representación en serie de potencia de: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$, para $|x| < 1$

Solución

Del ejercicio **(22)** se tiene: $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + ... + n x^n + ..., \quad \text{si } |x| < 1$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2^2 x + ... + n^2 x^{n-1} + ...$$

Multiplicando ambos miembros por x.

$$\frac{x^2+x}{(1-x)^3} = x + 2^2 x^2 + \ldots + n^2 x^n + \ldots, \text{ de donde:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}\ , \quad \text{para } |x| < 1$$

(24) Comprobar la representación en serie de potencia de x: $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$, si $|x| < 1$

Solución

Aplicando la serie geométrica convergente.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n + \ldots \quad \text{si } |x| < 1$$

Mediante el ejercicio **(23)** se tiene:

$$\frac{x^2+x}{(1-x)^3} = x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 \ldots + n^2 x^n + \ldots, \quad \text{si } |x| < 1$$

Derivando ambos miembros.

$$\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4} = 1 + 2^3 x + 3^3 x^2 + \ldots + n^3 x^{n-1} + \ldots$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$, de donde: $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

(25) Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}, \quad \text{si } |x| < 1$$

Solución

Del ejercicio **(24)** se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$, desarrollando

$$x+2^3x^2+3^3x^3+...+n^3x^n+... = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}, \text{ derivando}$$

$$1+2^4x+3^4x^2+...+n^4x^{n-1}+... = \frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5}$$

Multiplicando ambos miembros por x tiene:

$$x+2^4x^2+3^4x^3+...+n^4x^n+... = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$$

de donde: $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^4 = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$, para $|x| < 1$

3.8 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series y dar el radio de convergencia.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ **Rpta.** $2 < x < 4$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ **Rpta.** $2 \le x \le 4$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ **Rpta.** $1-\frac{1}{e} < x < 1+\frac{1}{e}$

④ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ **Rpta.** $|x| < 1$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$

⑥ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}$ **Rpta.** $\forall\ x \in R$

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)_n^n x^n$ **Rpta.** $|x| < 1$

⑧ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ **Rpta.** $-2 \le x \le 2$

⑨ $\sum_{n=0}^{\infty} (-2) \frac{x^n (n+2)}{n+1}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

⑩ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ **Rpta.** $|x| < 3$

⑪ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **Rpta.** $\forall\ x \in R$

⑫ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$ **Rpta.** $x \in [0,2]$

⑬ $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ **Rpta.** $x = 0$

⑭ $\sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\,h(2n)x^n$ **Rpta.** $x \in <-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}>$

⑮ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ **Rpta.** $\forall\ x \in R$

⑯ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,2^n}$ **Rpta.** $x \in [-2,2>$

⑰ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}\pi^n x^n}{n(n+1)(n+2)}$ **Rpta.** $x \in [-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]$

⑱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ **Rpta.** $x > 1$ absolutamente convergente

-$x < 1$ es condicionalmente convergente.

⑲ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ **Rpta.** es divergente $\forall\ x \in R$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + \frac{1}{2^n x^n})$ **Rpta.** $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$

(22) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ **Rpta.** $-1 < x \le 1$

(25) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(27) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^{2n-1} x^n$ **Rpta.** $-4 < x < 4$

(28) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n^2}$ **Rpta.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

(29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ **Rpta.** $-e < x < e$

(30) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n.\ln(n)}$ **Rpta.** $-3 < x < 3$

(31) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(32) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$ **Rpta.** $0 < x < 4$

(34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$ **Rpta.** $-e - 3 < x < e - 3$

(35) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$ **Rpta.** $x = -3$

(36) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$ **Rpta.** $2 < x < 8$

(37) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$ **Rpta.** $-\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}$

(38) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ **Rpta.** $2 \leq x \leq 4$

(39) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^5}{n5^n}$ **Rpta.** $-2 < x < 8$

(40) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ **Rpta.** $-2 < x < 0$

(41) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$ **Rpta.** $1 < x < 3$

(42) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n.9^n}$ **Rpta.** $-2 < x < 4$

(43) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$ **Rpta.** $1 < x < 5$

(44) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$ **Rpta.** $-3 < x < -1$

(45) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$ **Rpta.** $1 < x < 3$

(46) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ **Rpta.** $1 < x \leq 3$

(47) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1}.n^n}$ **Rpta.** $-2 < x < 0$

(48) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$ **Rpta.** $x > 1, \ x \leq -1$

(49) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.3^n (x-5)^n}$ **Rpta.** $x \geq 5\frac{1}{3}$, $x < 4\frac{2}{3}$

(50) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ **Rpta.** $x > 3$, $x < 1$

(51) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$ **Rpta.** $x \geq 1$, $x \leq -1$

(52) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ **Rpta.** $-\frac{1}{e} \leq x < \frac{1}{e}$

(53) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(54) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$ **Rpta.** $-2 < x < 2$

(55) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(56) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ **Rpta.** $0 < x < 2$

(57) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x+2)^n$ **Rpta.** $-4 < x < 0$

(58) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(59) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n.2^n}$ **Rpta.** $|x-2| < 2$

(60) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ **Rpta.** $|x| < 1$

(61) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(n+1)(x-1)^n$ **Rpta.** $|x-1| < \frac{1}{2}$

(62) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+6)^n}{n!}$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(63) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-2)x^{2n-1}}{2^{2n-2}(n-1)!(n-1)!(2n-1)}$ **Rpta.** $|x| < 1$

(64) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$ **Rpta.** $-1 \le x \le 1$

(65) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$ **Rpta.** $-1 < x \leq 3$

(66) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$ **Rpta.** $\forall\ x \neq 0$

(67) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\frac{1-x}{1+x})^n$ **Rpta.** $x > 0$

(68) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$ **Rpta.** $x \leq 0$

(69) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} x^n$ **Rpta.** $-1 \leq x < 1$

(70) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$ **Rpta.** $x = 0$

(71) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(72) $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n))^2 x^n$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(73) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(74) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+n)^n x^n$ **Rpta.** x = 0

(75) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-2)^n)x^n$ **Rpta.** $|x|<\frac{1}{2}$

(76) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n$ **Rpta.** $|x|<\frac{1}{2}$

(77) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ **Rpta.** $|x|<\frac{1}{4}$

(78) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)}{(3n)!}x^n$ **Rpta.** $|x|<27$

(79) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5n}x^n}{(2n)!n^{3n}}$ **Rpta.** $|x|<\frac{4}{e^2}$

(80) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!x^n}{(n!)^2}$ **Rpta.** x = 0

(81) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2\pi n)}{n!}x^n$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(82) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n!}x^n$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(83) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2^n} x a^n$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

(84) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2^n} x^n$ **Rpta.** $|x| < 2$

(85) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos 2\pi n}{3^n} x^n$ **Rpta.** $|x| < 3$

(86) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ **Rpta.** $|x| < e$

(87) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4n}(x-2)^n$ **Rpta.** $1 < x \leq 3$

(88) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2.2^n}$ **Rpta.** $-2 \leq x \leq 2$

(89) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x-3)^{2n-2}}{3n-2}$ **Rpta.** $1 < x < 2$

(90) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$ **Rpta.** $x > 0$

(91) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(-x)^n}$ **Rpta.** $x \geq 1$, $x < -1$

(92) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$ **Rpta.** x > 2, x < -2

(93) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$ **Rpta.** ∀ x ≠ 0

(94) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{2^{n+1}}$ **Rpta.** $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$

(95) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(\ln(n))^2}$ **Rpta.** -1 ≤ x < 1

(96) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{x}{1+x})^n$ **Rpta.** $x \geq -\frac{1}{2}$

(97) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{3^n}$ **Rpta.** -2 < x < 4

(98) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2n}}{(n+1)^2 5^n}$ **Rpta.** $[-\sqrt{5}-1, \sqrt{2}-1]$

(99) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n.n^3}$ **Rpta.** -1 ≤ x ≤ 3

(100) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\frac{3}{2})^n}{n+1} x^n$ **Rpta.** $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3}$

(101) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(102) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^2$ **Rpta.** $0 < x < 2$

(103) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+4)^n}{3^n.n^2}$ **Rpta.** $-7 \le x \le -1$

(104) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n(2n)!}$ **Rpta.** $-6 < x < 10$

(105) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!(\frac{3}{2})^n x^n}{1.3.5...(2n-1)}$ **Rpta.** $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

(106) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ **Rpta.** $-1 < x < 1$

(107) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln(n).2^n x^n}{3^n.n^2}$ **Rpta.** $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

(108) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.5.8...(3n-1)}(x-1)^n$ **Rpta.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$

(109) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}x^{5(n+1)}}{2n+1}$ **Rpta.** $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}} \le x < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

110 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n}+|x|^{3n}}{n^2}$ **Rpta.** $|x| \leq 1$

111 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x^{2n+1}$ **Rpta.** $[-1,1]$

112 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$ **Rpta.** $\langle -\infty, +\infty \rangle$

sug: $\displaystyle\left|\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

113 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n \operatorname{sen}(\frac{x}{3^n})$ **Rpta.** $-\infty < x < \infty$

sug: $\displaystyle\left|2^n \operatorname{sen}(\frac{x}{3^n})\right| \leq \left|\frac{x\,2^n}{3^n}\right|$

114 Verificar que: $\displaystyle\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, para $|x| < 1$

115 Demostrar que: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1-x)\ln(1-x)$

116 Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4} \quad \text{si } |x| < 1$$

117 Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)x^n}{2!} = \frac{1}{(1-x)^3} \quad \text{si } |x| < 1$$

(118) Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(a))^n}{n!} x^n \quad , \; a > 0 \;\; (\text{sug.: } a^x = e^{x \ln a})$$

(119) Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2-x} \quad \text{si } |x| < 2$$

(120) Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{sug.: } \cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x)$$

(121) Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{si } |x| < 1$$

(122) Comprobar el desarrollo en serie de potencia de x:

$$\frac{3x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (-2)^n\right) x^n \quad \text{si } |x| < \frac{1}{2}$$

$$(\text{sug.: } \frac{3x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x})$$

(123) Integrando término a término de 0 a x una representación en serie de potencia de t arctg(t). Demostrar: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x\right]$

(124) Escribir el desarrollo en serie de potencia de x:

a) $f(x) = xe^{-2x}$ **Rpta.** $f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1} x^n}{(n-1)!}$

b) $f(x) = \cos 2x$ **Rpta.** $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

c) $f(x) = \cos^2 x$ **Rpta.** $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

d) $f(x) = \text{sen}\, 3x + x\cos 3x$ **Rpta.** $f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2) \frac{3^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ **Rpta.** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

f) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Rpta. $f(x) = x - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + ... + \frac{(-1)^n 1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... |x| < 1$

(125) Hallar la serie de potencia de x de $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$

Rpta. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n 2^{n+1}\right)x^n$

(126) Hallar la serie de potencia de x de la función: $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$

Rpta. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n)!}$

(127) Hallar la serie de potencia de x de la función: $f(x) = \text{sen}^3 x$

Rpta. $f(x) = \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(3^{2n}-1)}{(2n+1)}x^{2n+1}$

(128) Muestre que:

$$\text{arcsen}\, x = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(129) Hallar la serie de potencia de x de la función: $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x}$

Rpta. $f(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13}{24}x^4 - \dfrac{13}{24}x^5 + \dots$

(130) Hallar la serie de potencia de x de las funciones

a) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{2+x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)(1+x^2)}$

(131) Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$

(132) Analizar la convergencia ó divergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{n!}$ en caso de ser convergente calcular su suma. **Rpta.** 8e

(133) Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$, sabiendo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

(134) Analizar la convergencia ó divergencia de las series siguientes y en caso de ser convergente calcular su suma.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$ **Rpta.** 27e

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{(n-1)!}$ **Rpta.** 20e

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n+2}{(n-1)!}$ **Rpta.** -3e

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$ **Rpta.** $\frac{e}{(e-1)^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}\, n!}$ **Rpta.** $e^{\frac{1}{4}}-1$

(135) Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n(n+1)}$. **Rpta.** 1

(136) Analizar y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.4^n}$ **Rpta.** $\ln(\frac{4}{4-x})$

(137) Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{x}+1\right)}$ **Rpta.** $\frac{1}{1-x}$

(138) La siguiente serie es convergente, calcular su suma $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-\frac{\pi^2}{16})^n$

Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(139) Si $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n+5}{(n+2)!}$ **Rpta.** $13-e$

(140) Hacer un análisis y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

(141) Analizar y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$

Rpta. $\frac{2}{(1-x)^3}$, para $|x|<1$.

(142) Hallar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)x^n}{n!}$ y concluir que

$$e=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{n!}$$

(143) Demostrar que para todo entero positivo P, se tiene: $(1-x)^{-p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p}{p}x^n$, $|x|<1$, donde el símbolo $\binom{n+p}{p}$ es una abreviación de $\frac{(n+p)(n+p+1)...(n+1)}{1.2.3...p}$ deducir la formula:

$$3^{P+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p}{p}(\frac{2}{3})^n$$

(144) Hallar la suma de la serie de la función $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(2cox)^n}$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$

Rpta. $-\operatorname{sen}^2 x$

(145) Estudiar la serie si converge hallar su suma $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^3 (-\frac{1}{e^{2n-4}})$

(146) Estudiar la serie si es convergente, hallar su suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)6^n}$

Rpta.: $\frac{1}{2}[210 \ln \frac{5}{6} + \frac{95}{72}]$

(147) Estudiar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)8^n}$ y en caso de convergencia, calcular la suma. **Rpta.** $\frac{8}{9} - 8 \ln \frac{9}{8}$

(148) Calcular la suma de la serie, analizando en que intervalo converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, y aplicar para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)4^n}$

(149) La siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$ es convergente, calcular su suma.

Rpta. $\frac{4e-27}{2}$

(150) Estudiar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)8^n}$, en caso de ser convergente calcular su suma.

151 Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ y calcular la suma de la serie. Aplicar a $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(\frac{1}{4})^{n-1}$

152 Si $a \in R$, $b > 1$, Demostrar que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na}{b^n} = \frac{ab}{(b-1)^2}$ aplicar el resultado para sumar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{5^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}+\pi n}{3^{n-2}}$

153 Halle el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n})x^n$ para a,b > 0 arbitrarios.

154 Demostrar que: $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{x^{2n-2}}{1+x^{2n-2}}) = \begin{cases} -1, & |x| < 1 \\ -\frac{1}{2}, & x = \pm 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

155 Hallar el intervalo de convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{5^{n+1}})^{n^2} x^{17n}$

156 Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n} \le \frac{3(26+19\sqrt{2})}{34-24\sqrt{2}}$

157 Pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{tg}^n(\frac{\pi}{6})}{(n+3)!} = \frac{1}{162\sqrt{3}}[54e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 63 - 19\sqrt{3}]$

158 Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\leq\frac{\pi^2}{12}$

159 Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$

160 Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1+\frac{1}{n}}^{2+\frac{1}{n}}\frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1+x^2+x^4}$

161 Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

162 Usando serie de potencias, demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}=1$

163 Calcular la suma de la serie

$$\operatorname{arctg}(\frac{x}{1})+\operatorname{arctg}(\frac{x}{1+1.2.x^2})+\operatorname{arctg}(\frac{x}{1+1.2.3.x^2})+...+\operatorname{arctg}(\frac{x}{1+n(n-1)x^2})+...$$

Rpta.: $\frac{\pi}{2}$

164 Analizar la serie si es convergente calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\operatorname{sen}x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{2^2}+\frac{\operatorname{sen}3x}{2^3}+...$$

Rpta. $\frac{2\operatorname{sen}x}{5-4\cos x}$

165 Dadas las series infinitas: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{2^3}\cos 3x + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2^3}\operatorname{sen} 3x + \dots$$

Se pide **a)** Demostrar la convergencia

b) Calcular la suma de cada serie

166 Dada la serie infinita. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + k\cos\alpha + k^2\cos 2\alpha + \dots + k^n \cos n\alpha + \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = k\operatorname{sen}\alpha + k^2 \operatorname{sen} 2\alpha + \dots + k^n \operatorname{sen} n\alpha + \dots$$

Siendo 0 < k < 1, Calcular la suma de cada serie

Rpta.: $\frac{1-k\cos\alpha}{1+k^2-2k\cos\alpha}$; $\frac{k\operatorname{sen}\alpha}{1+k^2-2k\cos\alpha}$

167 Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^{n+1}n!} + \frac{(n+1)!}{3!.n!.4^n}\right)$

168 Desarrollando en serie de potencia la función $f(x) = e^x$, calcular $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n!}$

Rpta. 0.2128

169 Si la serie es convergente calcular su suma $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n$ **Rpta.** $\frac{7}{9}$

(170) Estudiar cada una de las series siguientes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)5^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^2}{e^{5n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} [(3^{-n} + 2^{-2n})n]^2$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^{n+1}(\frac{\pi}{4})}{(n+3)!}$

en caso de ser convergente. Hallar la suma

(171) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^3}{4^n}$, si converge calcular la suma

Rpta. Converge, su suma es $-\frac{424}{27}$

APÉNDICES

SUMATORIAS.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

FÓRMULAS IMPORTANTES.

① $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

② $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

③ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

④ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n}{30}(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

① $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = nk$, k constante.

② $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$

③ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$ (1ra. Regla telescópica)

④ $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(k-1)$ (1ra. Regla telescópica generalizada)

⑥ $$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i+1)-f(i.-1)\right]=f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0)$$ (2da. regla telescópica)

⑥ $$\sum_{i=k}^{n}\left[f(i+1)-f(i.-1)\right]=f(n+1)+f(n)-f(k)-f(k-1)$$

(2da. regla telescópica generalizada)

PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL.

① $e^x.e^y=e^{x+y}$ ② $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ ③ $(e^x)^y=e^{xy}$

PROPIEDADES DEL LOGARITMO NATURAL: Ln A.

① $\ln AB=\ln A+\ln B$

② $\ln\frac{A}{B}=\ln A-\ln B$

③ $\ln A^r=r\ln A$

④ $\ln\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\ln A$

PROPIEDADES DEL FACTORIAL.

① n! = 1.2.3…n

② (n + 1)! = n!(n + 1)

EL NÚMERO e.

$$e=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=2.7182818284590452...$$

NÚMERO COMBINATORIO.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

BIBLIOGRAFÍA

(1) Cálculus Vól. 2 por: TOM. M. APOSTOL.

(2) Introducción a las Series por: ROBERT - SEELEY.

(3) Análisis Matemático Vól. 2 por: HASSER LA SALLE SULLIVAN.

(4) Problemas de Cálculo Infinitesimal y Teoría de Funciones por: MOYA – MORENO.

(5) Cálculus por: EINAR HILLE.

(6) Matemática Superior para Ingeniería por: C.R. WYLLE.

(7) Sucesiones y Series Vól. 1 y Vól. 2 por: YU TAKEUCHI.

(8) Problemas de Cálculo Infinitesimal por: A. GIL CRIADO.

(9) Cálculo Por: FRALEICHI.

(10) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático Por: G.N. BERMAN.

(11) Análisis Matemático Por: PROTTER - MORREY.

(12) Ejercicios y Problemas de Matemática Superior Vól. 2 Por: DANKO Y A. POPOV.

(13) Análisis de una Variable Real por: MARTINEZ SANZ.

(14) Principios de Análisis Matemático Por: E. LINÉS.